École d'initiation à la recherche du LMB

Rédaction d'un texte mathématique

Cécile Armana

Frasne, 22 janvier 2015

1 Exercices

Les phrases suivantes proviennent, ou s'inspirent, des textes de M. Audin [Aud], D. Knuth [Knu] et P. Halmos [Ste] pour la plupart. Essayez de comprendre pourquoi il ne faut pas les écrire (c'est-à-dire ce qu'on peut leur reprocher), corrigez-les et déduisez-en des règles générales. Pour certains exercices, des indications figurent à la fin de ce document.

1. Montrer qu'un nombre réel positif est un carré.

2. Si $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

3. Soit $x > 0 \in \mathbb{Z}$.

4. $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists u \in \mathbb{C}\ \exists q \in \mathbb{R}, ((z = qu) \wedge (|u| = 1) \wedge (q \geq 0))$.

5. La fonction $x^2 + 3$ est paire.

6. Soit U le corps des nombres réels.

7. Calculons $\displaystyle\sum_{\sigma\in\Sigma} a_\sigma$.

8. Soit A un anneau commutatif principal. Si x et y sont dans A, alors on a $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

9. *Théorème.* Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

10. Supposons que g est 1 fonction lipschitzienne.

11. Or X est connexe par arcs. Ce qui entraîne que X est connexe.

12.

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{1}$$

$\vdots$

La fonction g vérifie (1).

13. La fonction $x \mapsto e^{x+1}$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

14. Si p est un nombre premier qui divise $4n$, on a p divise 4 où p divise n.

15. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Comme la matrice M appartient à A, elle vérifie ${}^tM = -M$.

16. La signature est un morphisme de groupe.

17. Supposons que $a \in X$. X est un espace compact...

18. La variable aléatoire suit une loi de Bernouilli.

19. Alors on a

$$c = acx + bcy$$

Mais comme a divise acx et a divise b, il vient que a divise c.

20. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est généré par cette famille de vecteurs.

21. ... d'une longueur de 1.45 m.

22. Le Théorème 4.2 est une conséquence du théorème de Thalès.

23. Si p, alors si q, alors r.

24. $\forall y \in E \ f(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0$.

25. Pour toute fonction f, f^{-1} est continue.

26. ... où E et F sont 2 espaces vectoriels de dimension 2.

27. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, la somme de a et b est un entier.

28. $t^{\xi_k^\alpha}_{n_k^{\xi_k^\alpha}}$.

29. Considérons u_m, $m > n$.

30. Étudions le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & \overline{a} \text{ (réduction modulo n).} \end{array}$$

31. Posons $x = \pi$.

Alors $x > 3$.

Donc x est strictement plus grand que e.

32. La réunion d'une suite d'ensembles mesurables est mesurable.

33. Nous avons prouvé que si a^2 est pair alors a est pair. Supposons que a^8 est pair. Alors a^4 est pair. Alors a^2 est pair. Alors a est pair.

34. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ signifie que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies [f(x) - l| < \varepsilon.$$

35. *Démonstration.* On applique 3.3.2, 2.4.6 et 2.7.8. □

36. Ce mémoire est consacré à l'analyse.

Proposez de nouveaux énoncés d'exercices, en vous appuyant sur votre expérience.

Que pensez-vous des démonstrations suivantes ? Proposez une rédaction convenable.

Proposition. *Tout entier impair est de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$ pour un entier n.*

Démonstration. Un entier impair a pour reste 1 lorsqu'il est divisé par 2. Maintenant si on divise l'entier par 4, il a pour reste 1 ou 3. Donc le nombre est de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$. □

Démonstration. Un entier impair est de la forme $2m + 1$ avec m un entier qui peut être pair ou impair. Dans le premier cas, l'entier initial est de la forme $4n+1$ tandis que dans le second cas, il est de la forme $4n + 3$. □

Décodez l'énoncé suivant (adapté de [Lin]).

Proposition. *Si $\mathbb{L}^+(E, \mathbb{N})$ est l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{N}$ vérifiant*

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \cap [k_0, +\infty[\quad f(x) = 0$$

alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{L}^+(E, \mathbb{N})$ telle que si $\varphi(k) = f$ alors

$$k = \prod_{x \in E} x^{f(x)}.$$

Ici E désigne l'ensemble des nombres premiers.

2 Bibliographie commentée

Les textes [Aud], [Gos], [Knu], [Ste], et la conférence humoristique [Ser] font partie des références classiques sur les bonnes manières d'écrire les mathématiques. Il existe de nombreux autres ouvrages sur le sujet, parmi lesquels [Gil].

La formule de l'exercice 28 est tirée d'un article de Sierpiński [Sie]. L'utilisation des symboles mathématiques dans cet article fait d'ailleurs l'objet d'une étude détaillée dans [Gil]. Quant à [Lin], il s'agit d'un ouvrage satirique sur la formalisation des mathématiques et l'art de rendre compliquées des choses simples.

Pour le bon usage de la langue française, on renvoie à [Gre] et pour celui de la langue anglaise dans un cadre mathématique, à [Tr1] et [Tr2].

[Aud] M. Audin, *Conseils aux auteurs de textes mathématiques (comment rédiger des mathématiques et en particulier une thèse).* Disponible à l'adresse `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/howto.pdf` .

[Gos] D. Goss, *Some hints on mathematical style.* Disponible à l'adresse `http://math.osu.edu/~goss.3/hint.pdf` .

[Gre] M. Grevisse, *Le bon usage : Grammaire française.* De Boeck, 2011. Disponible à la BU Sciences.

[Gil] L. Gillman, *Writing Mathematics Well.* Mathematical Association of America, 1987.

[Knu] D. Knuth, T. Larrabee, P. Roberts, *Mathematical writing* (notes de cours). Disponible à l'adresse `http://jmlr.csail.mit.edu/reviewing-papers/knuth_mathematical_writing.pdf` .

[Lin] C. Linderholm, *Mathematics made difficult.* World Publishing, 1972.

[Ser] J.-P. Serre, *How to write mathematics badly.* Conférence disponible en vidéo à l'adresse `http://www.youtube.com/watch?v=ECQyFzzBHlo`.

[Sie] W. Sierpiński, *Sur une certaine suite infinie de fonctions d'une variable réelle.* Fund. Math XX (1933), 163–165. Disponible à l'adresse `https://eudml.org/doc/212621` .

[Ste] N. Steenrod, P. Halmos, M. Chiffer, J. Dieudonné, *How to write mathematics.* American Mathematical Society, 1973.

[Tr1] J. Trzeciak, *Writing Mathematical Papers in English : a Practical Guide.* European Mathematical Society, 1995. Disponible à la bibliothèque du LMB.

[Tr2] J. Trzeciak, *Mathematical English Usage – a Dictionary.* Disponible à l'adresse `http://www.impan.pl/Dictionary/` .

Indications. **1.** Lequel ? **4.** Décodez l'énoncé. **9.** Qu'en est-il d'une fonction dérivable g ? **13.** Voir l'exercice 5. **18.** Bernou-qui ? **19.** Où termine la phrase ? **24.** Quel sens donneriez-vous à l'énoncé ? **32.** Une suite n'est pas qu'un ensemble dénombrable.