Feuille d'exercices n°1

Structures algébriques, anneaux $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, divisions euclidiennes

---

Structures algébriques

Exercice 1. On considère $G = \{\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^*\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que G muni de la multiplication matricielle est un groupe commutatif.

Exercice 2. On considère l'ensemble G des fonctions de la forme :

$$f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

telles que $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que G muni de la composition est un groupe. Est-il commutatif ?

Exercice 3. Soit $A = \{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On le munit de l'addition et la multiplication usuelles sur les matrices. Montrer que A est un anneau unitaire commutatif. Est-ce un corps ? Maintenant, on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}$ dans la définition de A. La multiplication admet-elle un élément neutre ?

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 1 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\{1, X\}$ est une base de E.
2) On pose $P_1(X) = 2X - 1$ et $P_2(X) = X + 1$. Montrer que $\{P_1, P_2\}$ est une base de E.
3) Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$, on définit le polynôme dérivé de P de la façon suivante : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Démontrer que l'application dérivation :

$$D : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

   est linéaire.
4) Ecrire la matrice M de D dans la base $\{P_1, P_2\}$. Démontrer que $M^2 = 0$.

Manipulation de polynômes

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré du polynôme $(X+1)^{7n+4} - X^{7n+4} - 1$?

Exercice 6. On considère le polynôme $(2X^4 - 8X^2 - 1)^3 - (18X^7 - 2X^{12} + X^8 - 13X^4 - 1)$. Quels sont les coefficients de X^{12} ? X^{10} ? X^7 ? Quel est le coefficient constant ?

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P(-X)$. Montrer que P est somme de monômes de degré pair uniquement.

Exercice 8. Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X) = P(1-2X)$ (pour se faire une idée, on pourra commencer par déterminer les polynômes de degré 1 et 2 vérifiant cette propriété).

Exercice 9. On définit, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P'' = D(D(P))$ (voir exercice 4). Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ (on pourra commencer par déterminer le degré d'un tel P).

Divisibilité

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3x^2 + xy - 11 = 0$.

Exercice 11. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.

Exercice 12. Le polynôme $X - 1$ est-il divisible par $3X - 3$ dans $\mathbb{Z}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$? Le polynôme $X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 13. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que Q divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

Division euclidienne

Exercice 14. Écrire les divisions euclidiennes :

1) dans $\mathbb{Z}$: de 850 par 378 ; de 1458 par 117 ; de 138 par 46 ; de -15 par 7 ;
2) dans $\mathbb{Q}[X]$: de $7X^4 - X^3 + 2X - 4$ par $2X^3 - 3X - 5$;
3) dans $\mathbb{R}[X]$: de $X^4 + 2X^3 - X + 6$ par $X^3 - 6X^2 + X + 4$;
4) dans $\mathbb{C}[X]$: de $iX^3 - X^2 + (1-i)$ par $(1+i)X^2 - iX + 3$.

Exercice 15. Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq n \leq 105$ sachant que les restes de la division euclidienne de n par 3, 5, 7 sont respectivement 1, 2, 3.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 est égal à 0, 1 ou 4.

Exercice 17. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Idéaux

Exercice 18. Soit A un anneau et I et J deux idéaux de A. Montrer que $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ est un idéal de A.