Université Paris 7 | **Deuxième semestre 2003-2004**
DEUG MIAS Info - 1ère année | **MT132 - groupe 1B4**

Feuille d'exercices n°4

Racines de polynômes, polynômes irréductibles

Exercice 1. On définit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$.

1) Montrer que 1 est une racine de P. Quel est son ordre de multiplicité ?
2) En déduire une factorisation de P.

Exercice 2. *(Examen de juin 2003)* On pose $A = X^6 + 4X^5 + 7X^4 + 8X^3 + 7X^2 + 4X + 1$. Vérifier que -1 est une racine de A. Déterminer sa multiplicité.

Exercice 3. Soient $P(X) = X^4 + 7X^3 + 13X^2 - 3X - 18$ et $Q(X) = X^8 + 7X^6 + 13X^4 - 3X^2 - 18$. Calculer $P(1)$ et $P(-2)$. Déterminer la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire la décomposition de Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4. Soit n un entier ≥ 2. Démontrer que le polynôme $P_n(X) = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \ldots + \frac{1}{n!}X^n$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5. Soit n un entier ≥ 2. Démontrer que le polynôme $P_n(X) = X^n - X + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Pour $n \geq 2$, on pose $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X^2 + X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que, dans $\mathbb{R}_+^*$, P_n a une unique racine.

Exercice 7. Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, avec $a_n \neq 0$.

1) Démontrer que si le nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ (où p et q sont des entiers premiers entre eux avec $q > 0$) est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.
2) Démontrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ n'a pas de racine rationnelle.
3) Déterminer les racines rationnelles du polynôme $3X^3 + 8X^2 + 12X - 5$, et donner sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit P un polynôme à coefficients réels. Démontrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{z}$ est également racine de P.

Exercice 9. On définit $P(X) = 5X^4 + 10X^2 + 5$. Démontrer que i est une racine double de P. En déduire sans calculs que $-i$ est une racine double de P.

Exercice 10. *(Partiel de mars 2003)*

1) On pose $S = X^5 + X + 1$.

a) Soir $r \in \mathbb{Q}^*$. Montrer que si $S(r) = 0$, alors $r = +1$ ou $r = -1$.

b) Vérifier que -1, 0 et 1 ne sont pas racines de S.

c) Conclure que S n'a pas de racine rationnelle.

d) Vérifier que j est une racine de S.

e) Écrire la décomposition de S en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) Démontrer que $B = X^3 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle α, et que cette racine vérifie $-1 < \alpha < 0$ (on ne cherchera pas à calculer α).

3) Écrire la décomposition de B en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ en fonction de α.

4) Donner la décomposition de S en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11. *(Examen de septembre 2003)* Soit $P = X^3 - 3X + a$ ($a \in \mathbb{R}$).

1) Pour quelles valeurs de a le polynôme P possède-t-il une racine multiple ? Précisez alors la multiplicité.

2) Pour chacune de ces valeurs de a, décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Pour tout a, déterminer un pgcd de P et P'.

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient impairs. Démontrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13. Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients *réels*. Démontrer que P a (au moins) une racine réelle.

Exercice 14. Démontrer que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes (de degré 2) de la forme aX^2+bX+c avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac < 0$. En déduire que tout polynôme *réel* de degré ≥ 3 est non irréductible.