Feuille d'exercices n°5

Groupes

Exercice 1. Sur $\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} | r > 0\}$, on définit la loi interne : $a * b = \frac{a}{b}$. Fait-elle de $(\mathbb{Q}^+, *)$ un groupe ?

Exercice 2. On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients réels. La matrice identité est désignée par I.

1) Démontrer que $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe infini.
2) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de la forme λI, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que $(\mathcal{H}, \times)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
3) Démontrer que $(\mathcal{H}, \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Exercice 3. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. A tout matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on associe sa trace $tr(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{kk}$. Démontrer que l'application trace est un morphisme de groupes de $(M_n(\mathbb{R}), +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Quelle est son image ? Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 4.

1) Soit X un ensemble. Démontrer que l'ensemble des bijections de X sur X muni de la loi de composition est un groupe.
2) *(Examen de septembre 2003)* Pour tout complexe a non nul et pour tout complexe b, on considère les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\theta_a : z \mapsto az \quad \text{et} \quad \tau_b : z \mapsto z + b.$$

   a) Démontrer que θ_a et τ_b sont des bijections.
   b) Démontrer que $H = \{\theta_a, a \in \mathbb{C}^*\}$ et $T = \{\tau_b, b \in \mathbb{C}\}$ sont des sous-groupes du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
   c) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ pour lesquels $\theta_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \theta_a$.

Exercice 5. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ l'application définie par $f(t) = e^{2\pi i t}$. Démontrer que f est un morphisme de groupes. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 6. Soit $(G, *)$ un groupe de neutre e. Supposons que tout élément x de G vérifie $x * x = e$. Démontrer que G est commutatif. Donner un exemple de groupe vérifiant cette propriété.

Exercice 7. On considère les éléments suivants du groupe $GL_2(\mathbb{R})$ (la loi étant la multiplication matricielle) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer les ordres de A et B.
2) Calculer $A^{1234567}$ et B^{5978}.

Exercice 8. Soit G un groupe fini d'élément neutre e. Soient H et K des sous-groupes de G d'ordre n et m, avec n et m premiers entre eux. Que dire de l'ordre de $H \cap K$? En déduire que $H \cap K = \{e\}$.

Exercice 9.

1) *Deux résultats importants.* Soit $(G, \cdot)$ un groupe, de neutre 1.
   a) Soit x un élément de G, d'ordre m. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $x^a = 1$ si et seulement si m divise a.
   b) En déduire que si G est fini d'ordre n, alors tout élément x de G vérifie $x^n = 1$.
2) Soient G et H deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Soit $x \in G$ un élément d'ordre fini, noté n. Démontrer que $f(x)$ est d'ordre fini dans H, et que son ordre divise n.
3) Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif. Soient x et y des éléments de G, d'ordres respectifs m et n, avec m et n premiers entre eux. Quel est l'ordre de xy ?

Exercice 10. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre N impair. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

1) Soit $g \in G$, d'ordre n. Que peut-on dire de la parité de n ?
2) En déduire un élément x de G tel que $x^2 = g$.
3) Démontrer que f est bijective.

Exercice 11. *Le groupe des racines nèmes de l'unité.* Soit n un entier ≥ 1. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines complexes du polynôme $P_n(X) = X^n - 1$. Ce sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$. On les appelle les racines $n$èmes de l'unité.

1) Le polynôme P_n admet-il des racines multiples dans $\mathbb{C}$? En déduire qu'il y a exactement n racines $n$èmes de l'unité distinctes.
2) Démontrer que 1 appartient à $\mathbb{U}_n$. En déduire une factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3) Démontrer que $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe.
4) Soit $\alpha \in \mathbb{U}_n$, $\alpha \neq 1$. Démontrer que α vérifie la relation $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$.
5) Dans cette question, on suppose $n = 3$. On note $j = e^{2i\pi/3}$. Démontrer que j appartient à $\mathbb{U}_3$. Démontrer que $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$.
6) Résoudre l'équation $z^n = 1$, c'est-à-dire déterminer $\mathbb{U}_n$.
7) Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.