Feuille d'exercices n°6

Groupes cycliques, groupe symétrique

Tables de groupes finis

Exercice 1. Soit $A = \{0 \bmod 4, 1 \bmod 4, 2 \bmod 4, 3 \bmod 4\}$.

1) Dresser la table de l'addition dans A. L'ensemble A muni de l'addition est-il un groupe ?
2) Dresser la table de la multiplication dans A. L'ensemble A muni de la multiplication est-il un groupe ?

Exercice 2.

1) Soit G un groupe multiplicatif, et $a \in G$. Démontrer que l'application $f_a : x \mapsto ax$ de G dans G est bijective. Même question pour $h_a : x \mapsto xa$.
2) En déduire que la table de la loi d'un groupe fini est un carré latin, c'est-à-dire que, dans chaque colonne et chaque ligne, chaque élément du groupe apparaît une et une seule fois.
3) Les tables suivantes correspondent-elles à des lois de groupes sur $\{a, b, c\}$?

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Groupes cycliques

Exercice 3. Soit n un entier ≥ 1. Le groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n$ des racines $n$èmes de l'unité est formé des $e^{2ik\pi/n}$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

1) Démontrer que $\mathbb{U}_n$ est cyclique. En donner un générateur.
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note z un générateur de $\mathbb{U}_n$.
   a) Démontrer que si z^k engendre $\mathbb{U}_n$, alors k et n sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que k et n ont un pgcd $d > 1$).
   b) On suppose k et n premiers entre eux. Démontrer qu'un entier m vérifie $(z^k)^m = 1$ si et seulement si n divise m. En déduire l'ordre de z^k. En déduire que z^k engendre $\mathbb{U}_n$.
3) En utilisant la question 2), déterminer tous les générateurs de $\mathbb{U}_n$. Etablir la liste pour $n = 5$ et $n = 6$.

Exercice 4. Soit G un groupe de cardinal p premier. Démontrer que G est cyclique et engendré par n'importe quel élément de G distinct du neutre.

Exercice 5. Soient G et H deux groupes cycliques, d'ordres respectifs n et m premiers entre eux. Démontrer que le groupe $G \times H$ est cyclique (on pourra montrer que si x désigne un générateur de G et y un générateur de H, alors (x, y) est d'ordre nm).

Groupe symétrique

Exercice 6. On considère dans $\mathcal{S}_6$ les permutations suivantes :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les permutations $x \circ y$ et $x \circ z$.
2) Quels sont les supports de x, y, z, $x \circ y$ et $x \circ z$?
3) Est-ce que x et z commutent ? Est-ce que x et y commutent ?

Exercice 7. Démontrer que pour $n \geq 3$, le groupe $\mathcal{S}_n$ n'est pas commutatif.

Exercice 8. Soit G un groupe fini, et $\mathcal{S}_G$ l'ensemble des applications bijectives de G dans G. On rappelle que c'est un groupe pour la loi de composition. L'application $f_a : x \mapsto ax$ de G dans G est bijective (voir exercice 2).

1) Démontrer que l'application :
$$\begin{array}{rccc} f: & G & \to & \mathcal{S}_G \\ & a & \mapsto & f_a \end{array}$$
est un morphisme de groupes injectif.
2) En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$ (théorème de Cayley).

Exercice 9. On considère le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ d'ordre n.

1) Rappeler quel est l'ordre d'un cycle $c = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$ de longueur k, où $k \leq n$.
2) Soient c_1 et c_2 deux cycles de supports disjoints et d'ordres respectifs m et p. Démontrer que l'ordre de c_1c_2 est $\mathrm{ppcm}(m, p)$.
3) Écrire les permutations x et z de l'exercice 6 sous forme de cycles. En déduire sans calcul les ordres de x, z et $x \circ z$.

Exercice 10. Soient $G = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ et $H = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$.

1) Démontrer que G et H sont des sous-groupes de $\mathcal{S}_4$.
2) Soit f un morphisme de groupes de G dans H. Démontrer que pour tout $s \in G$, $f(s)^2 = id$.
3) En déduire que les groupes G et H ne sont pas isomorphes.