Université Paris 7 | **Deuxième semestre 2003-2004**
DEUG MIAS Info - 1ère année | **MT132 - groupe 1B4**

Feuille d'exercices n°7

Groupe symétrique

Exercice 1. On considère dans $\mathcal{S}_6$ les permutations suivantes (voir feuille 6, exercice 6) :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Décomposer x, y, z, $x \circ y$ et $x \circ z$ en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 2. Calculer l'ordre des permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (1\ 4)(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 4).$$

Exercice 3. *(Partiel de mars 2003)* Dans $\mathcal{S}_8$, on pose $s = (1\,7\,3\,2)(5\,4)$, $a = (8\,1\,6\,3)(4\,2\,5\,7)$ et $b = (8\ 6)(2\ 7)$.

1) Décomposer en produit de cycles à supports disjoints $a \circ s$, $s \circ a$, $s \circ a^2$ et $b \circ a^2$.
2) a) Calculer les puissances successives de $g = s \circ a^2$ et trouver le plus petit entier $n_0 \geq 1$ tel que $g^{n_0} = 1$.
   Décomposer g^{67} en produit de cycles à supports disjoints.
   b) On pose $G = \{g, g^2, \ldots, g^{n_0}\}$. Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{S}_8$.
3) On pose $H = \{b, b \circ a^2, a^2, 1\}$. Démontrer que H est un sous-groupe de $\mathcal{S}_8$.
4) Les groupes G et H sont-ils isomorphes ?

Exercice 4.

1) Soit $c = (a_1\ \ldots\ a_k\ )$ un cycle de longueur k dans $\mathcal{S}_n$. Démontrer que c se décompose en produit de transpositions.
2) En déduire que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ s'écrit comme produit de transpositions.
3) Écrire en produit de cycles à supports disjoints puis en produit de transpositions les permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (1\ 3\ 5\ 2)(2\ 6\ 5\ 7)(5\ 4\ 7\ 3).$$

Exercice 5.

1) Soit $c = (a_1\ \ldots\ a_k)$ un cycle de longueur k dans $\mathcal{S}_n$. Démontrer que c^{-1} est un cycle, et en donner l'écriture. Quel est son ordre ?
2) Donner l'inverse des deux permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$