Université Paris 7 — **Deuxième semestre 2003-2004**
DEUG MIAS Info - 1ère année — **MT132 - groupe 1B4**

Interrogation écrite n°2

Durée : 1 heure
Les cours, documents, calculatrices, téléphones ne sont pas autorisés.

Question de cours. Soit G un groupe fini. Donner la définition de l'ordre d'un élément de G.

Exercice 1.

1) Résoudre le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 4 \mod 5. \end{cases}$$

2) Tom a acheté un paquet de bonbons. S'il les partage équitablement avec 6 de ses amis, il reste 3 bonbons. S'il les partage équitablement avec 4 de ses amis, il reste 4 bonbons. Combien le paquet contient-il de bonbons au minimum ?

Exercice 2.

1) On considère dans $\mathcal{S}_n$ le cycle $c = (a_1 \ \dots \ a_k)$ de longueur k ($k \leq n$). Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $(\sigma(a_1) \ \dots \ \sigma(a_k))$.
2) Déterminer toutes les permutations σ de $\mathcal{S}_7$ telles que $\sigma \circ (2\ 4\ 6\ 1\ 3\ 5\ 7) \circ \sigma^{-1} = (3\ 5\ 1\ 7\ 2\ 4\ 6)$.
3) Donner leur décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 3. Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. On rappelle que j vérifie les relations $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $\overline{j} = j^2$.

1) Vérifier que j est une racine de P. Quelle est sa multiplicité ?
2) En déduire *sans calculs* que j^2 est une racine de P, de même multiplicité que j.
3) En remarquant que P est un polynôme pair, en déduire deux autres racines complexes de P. Démontrer *sans calculs* qu'elles ont même multiplicité que j.
4) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
5) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Barème approximatif : 2 pts, 5 pts, 5 pts, 8 pts.