

FEUILLE D'EXERCICES N°6

Groupes cycliques, groupe symétrique

TABLES DE GROUPES FINIS

Exercice 1. Soit $A = \{0 \bmod 4, 1 \bmod 4, 2 \bmod 4, 3 \bmod 4\}$.

- 1) Dresser la table de l'addition dans A . L'ensemble A muni de l'addition est-il un groupe ?
- 2) Dresser la table de la multiplication dans A . L'ensemble A muni de la multiplication est-il un groupe ?

Exercice 2.

- 1) Soit G un groupe multiplicatif, et $a \in G$. Démontrer que l'application $f_a : x \mapsto ax$ de G dans G est bijective. Même question pour $h_a : x \mapsto xa$.
- 2) En déduire que la table de la loi d'un groupe fini est un carré latin, c'est-à-dire que, dans chaque colonne et chaque ligne, chaque élément du groupe apparaît une et une seule fois.
- 3) Les tables suivantes correspondent-elles à des lois de groupes sur $\{a, b, c\}$?

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

GROUPES CYCLIQUES

Exercice 3. Soit n un entier ≥ 1 . Le groupe multiplicatif \mathbb{U}_n des racines n èmes de l'unité est formé des $e^{2ik\pi/n}$, pour $0 \leq k \leq n - 1$.

- 1) Démontrer que \mathbb{U}_n est cyclique. En donner un générateur.
- 2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note z un générateur de \mathbb{U}_n .
 - a) Démontrer que si z^k engendre \mathbb{U}_n , alors k et n sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que k et n ont un pgcd $d > 1$).
 - b) On suppose k et n premiers entre eux. Démontrer qu'un entier m vérifie $(z^k)^m = 1$ si et seulement si n divise m . En déduire l'ordre de z^k . En déduire que z^k engendre \mathbb{U}_n .
- 3) En utilisant la question 2), déterminer tous les générateurs de \mathbb{U}_n . Etablir la liste pour $n = 5$ et $n = 6$.

Exercice 4. Soit G un groupe de cardinal p premier. Démontrer que G est cyclique et engendré par n'importe quel élément de G distinct du neutre.

Exercice 5. Soient G et H deux groupes cycliques, d'ordres respectifs n et m premiers entre eux. Démontrer que le groupe $G \times H$ est cyclique (on pourra montrer que si x désigne un générateur de G et y un générateur de H , alors (x, y) est d'ordre nm).

GROUPE SYMÉTRIQUE

Exercice 6. On considère dans \mathcal{S}_6 les permutations suivantes :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer les permutations $x \circ y$ et $x \circ z$.
- 2) Quels sont les supports de $x, y, z, x \circ y$ et $x \circ z$?
- 3) Est-ce que x et z commutent? Est-ce que x et y commutent?

Exercice 7. Démontrer que pour $n \geq 3$, le groupe \mathcal{S}_n n'est pas commutatif.

Exercice 8. Soit G un groupe fini, et \mathcal{S}_G l'ensemble des applications bijectives de G dans G . On rappelle que c'est un groupe pour la loi de composition. L'application $f_a : x \mapsto ax$ de G dans G est bijective (voir exercice 2).

- 1) Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow \mathcal{S}_G \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes injectif.

- 2) En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de \mathcal{S}_G (théorème de Cayley).

Exercice 9. On considère le groupe symétrique \mathcal{S}_n d'ordre n .

- 1) Rappeler quel est l'ordre d'un cycle $c = (a_1 a_2 \dots a_k)$ de longueur k , où $k \leq n$.
- 2) Soient c_1 et c_2 deux cycles de supports disjoints et d'ordres respectifs m et p . Démontrer que l'ordre de $c_1 c_2$ est $\text{ppcm}(m, p)$.
- 3) Écrire les permutations x et z de l'exercice 6 sous forme de cycles. En déduire sans calcul les ordres de x, z et $x \circ z$.

Exercice 10. Soient $G = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ et $H = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$.

- 1) Démontrer que G et H sont des sous-groupes de \mathcal{S}_4 .
- 2) Soit f un morphisme de groupes de G dans H . Démontrer que pour tout $s \in G$, $f(s)^2 = id$.
- 3) En déduire que les groupes G et H ne sont pas isomorphes.