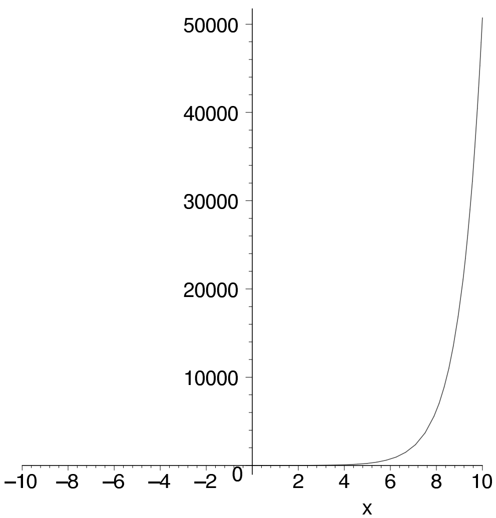
Correction du contrôle du 18 octobre

Exercice 1

```
> f:=x->exp(x)*ln(x);
```

$$f := x \to \mathbf{e}^x \ln(x)$$

```
> plot(f(x),x);
```



Remarque : La commande *plot* a plusieurs syntaxes possibles. Avec la syntaxe ci-dessus, Maple choisit par défaut l'intervalle -10..10 en abscisse. On peut en imposer un en remplaçant x par x=a..b. On peut aussi imposer un intervalle en ordonnée par y=c..d Voir l'aide de la fonction *plot* pour plus d'informations.

Exercice 2

Il y a un exercice similaire dans la feuille d'exercices n°2. Il s'agit de déterminer la "formule" qui se cache derrière les séquences, puis utiliser la commande *seq* avec cette formule.

```
> seq(t^n-n,n=1..5);
```

$$t-1,\ t^2-2,\ t^3-3,\ t^4-4,\ t^5-5$$

```
> seq(n*x+(n+1)*y,n=1..5);
```

$$x+2\,y,\ 2\,x+3\,y,\ 3\,x+4\,y,\ 4\,x+5\,y,\ 5\,x+6\,y$$

Exercice 3

Commençons par définir les trois nombres complexes.

```
> restart ; a:=sqrt(3)+I ; b:=-1-I*sqrt(3) ; c:=-2;
```

$$a := \sqrt{3}+I$$

$$b := -1-\sqrt{3}\,I$$

$$c := -2$$

La longueur AB est égale au module |b-a| du nombre complexe b-a. De même, BC=|c-b| et CA=|a-c|. Calculons ces modules à l'aide de Maple.

```
> abs(b-a); abs(c-b); abs(a-c);
```

$$\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$$

$$2$$

$$\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+1}$$

Simplifions pour voir si certains sont égaux.

```
> simplify(abs(b-a)) ; simplify(abs(c-b)) ; simplify(abs(a-c));
```

$$\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$$

$$2$$

$$\sqrt{2}\,\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Donc les longueurs AB et AC valent $\sqrt{2}\,\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Par contre, le troisième côté n'a pas la même longueur. Donc le triangle ABC est isocèle en A.

Remarque 1 : on pouvait également essayer de déterminer la nature du triangle en calculant ses angles.
En plaçant les points sur le plan, et en orientant les angles dans le sens trigonométrique, on voit que les angles des sommets du triangle sont : (BA,BC), (CB,CA) et (AC,AB). Leurs mesures sont données respectivement par :
argument((c-b)/(a-b)), argument ((a-c)/(b-c)) et argument ((b-a)/(c-a)).

```
> s:=[ argument((c-b)/(a-b)) , argument((a-c)/(b-c)) ,
  argument((b-a)/(c-a)) ];
```

$$s := \left[\arctan\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right), \frac{5\,\pi}{12}, \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\,\sqrt{3}+3}\right)\right]$$

```
> simplify(s);
```

$$\left[\arctan\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right), \frac{5\,\pi}{12}, \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\,\sqrt{3}+3}\right)\right]$$

On n'arrive pas à les simplifier avec la commande *simplify*. En fait, il faut d'abord simplifier la fraction à l'intérieur de l'arctan (en enlevant les racines carrées au dénominateur à l'aide de *rationalize*) . Par exemple, pour le premier angle :

```
> rationalize(1/(3^(1/2)-1)*(1+3^(1/2)));
```

$$\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$$

```
> expand(%);
```

$$\sqrt{3}+2$$

puis appliquer l'arctan :

```
> arctan(%);
```

$$\frac{5\,\pi}{12}$$

Donc le premier angle vaut en fait 5*Pi/12. On fait la meme manipulation pour le troisième angle :

```
> rationalize(1/(2*3^(1/2)+3)*(3^(1/2)+2));
```

$$\frac{(\sqrt{3}+2)(-3+2\,\sqrt{3})}{3}$$

```
> expand(%);
  arctan(%);
```

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

Le troisième angle vaut Pi/6. Les angles (BA,BC) et (CB,CA) sont égaux. Le triangle est isocèle en A.
Cette démonstration est plus délicate, notamment pour simplifier les expressions des angles obtenus. Elle n'était pas exigée, et il était plus facile de traiter l'exercice avec les modules !

Remarque 2 : certains se sont demandés si le triangle ABC était rectangle. Une façon de voir si c'est vrai, sans passer par les angles, est d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.
Soient L1, L2 et L3 les longueurs des côtés.

```
> L1:=abs(b-a) ; L2:=abs(c-b) ; L3:=abs(a-c);
```

$$L1 := \sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$$
$$L2 := 2$$
$$L3 := \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+1}$$

Regardons si nous avons L1^2+L2^2=L3^2 ou bien L2^2+L3^2=L1^2 ou bien L1^2+L3^2=L2^2.

```
> simplify(L1^2+L2^2-L3^2);
  simplify(L2^2+L3^2-L1^2);
  simplify(L1^2+L3^2-L2^2);
```

$$4$$
$$4$$
$$12+8\sqrt{3}$$

Ces trois quantités sont non nulles, donc le triangle n'est pas rectangle.

Remarque 3 : Revenons aux longueurs des côtés :

```
> L:=[L1,L2,L3];
```

$$L := [\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}), 2, \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+1}\,]$$

On peut demander des valeurs *approchées* de ces longueurs (par défaut à 10 chiffres significatifs):

```
> evalf(L);
```

$$[3.863703305, 2., 3.863703305]$$

On voit que la première et la troisième ont la même valeur approchée. Cela peut donner une piste, mais **cela ne démontre en aucun cas** que le premier et le troisième côté ont même longueur. En effet, qu'est-ce qui vous dit que les 15èmes chiffres après la virgule ne vont pas etre différents ? Ce n'est pas la meme chose de faire du calcul approché et du calcul exact (dit aussi formel). Dans l'exercice, on vous demandait une démonstration, et non pas un calcul approché.

<u>Exercice 4</u>

```
> restart;
  P:=x->x^3+(1-3*a)*x^2+(3*a^2-2*a)*x+a^2-a^3;
```

$$P := x \rightarrow x^3+(1-3\,a)\,x^2+(3\,a^2-2\,a)\,x+a^2-a^3$$

Attention à bien définir une *fonction* comme demandé dans l'énoncé ! (par la flèche ou par *unapply*). Certains ont défini une expression en x, c'est-à-dire qu'ils ont tapé : P := x^3+(1-3*a)*x^2+....etc

```
> P;
  P(x);
```

$$P$$
$$x^3+(1-3\,a)\,x^2+(3\,a^2-2\,a)\,x+a^2-a^3$$

1) On demande de trouver les racines x, c'est-à-dire qu'on résout l'équation P(x)=0 par rapport à x (les solutions seront alors exprimées en fonction de a).

```
> solve(P(x)=0,x);
```

$$-1+a, a, a$$

La commande suivante ne répondait pas à la question : elle résout l'équation en fonction de x et de a.

```
> solve(P(x)=0);
```

$$\{x=x, a=x+1\}, \{x=x, a=x\}$$

2)

```
> expand(P(x));
```

$$x^3+x^2-3\,x^2\,a+3\,x\,a^2-2\,x\,a+a^2-a^3$$

```
> collect(P(x),a);
```

$$-a^3+(3\,x+1)\,a^2+(-3\,x^2-2\,x)\,a+x^3+x^2$$

3 a) Maintenant, on attribue à a la valeur -1.

```
> a:=-1; P(x);
```

$$a := -1$$
$$x^3+4\,x^2+5\,x+2$$

```
> P(1+sqrt(3));
```

$$(1+\sqrt{3})^3+4\,(1+\sqrt{3})^2+7+5\sqrt{3}$$

```
> simplify(%);
```

$$33+19\sqrt{3}$$

3b)

```
> int(P(x),x=-1..1);
```

$$\frac{20}{3}$$