Correction du partiel du 8 novembre

Remarque générale : dans les copies, un certain nombre d'erreurs sont dûes à une mauvaise lecture de l'énoncé. Lisez attentivement les instructions et les questions avant d'y répondre ! Si on demande de calculer la *fonction* dérivée, donnez une fonction et non pas une expression. Dans l'exercice sur l'étude de fonction, tous les calculs qui peuvent etre faits *doivent etre faits avec Maple*, et vous devez donner les commandes correspondantes !

Enfin, attention pour ceux qui font encore l'erreur : l'exponentielle $\mathbf{e}^x$ s'obtient dans Maple en tapant `exp(x)` et non pas `e^x` !!!

Exercice 1

1)

```
> restart;
  with(numtheory);
Warning, the protected name order has been redefined and unprotected
```

[*GIgcd*, *bigomega*, *cfrac*, *cfracpol*, *cyclotomic*, *divisors*, *factorEQ*, *factorset*, *fermat*, *imagunit*, *index*, *integral_basis*, *invcfrac*, *invphi*, *issqrfree*, *jacobi*, *kronecker*, λ, *legendre*, *mcombine*, *mersenne*, *migcdex*, *minkowski*, *mipolys*, *mlog*, *mobius*, *mroot*, *msqrt*, *nearestp*, *nthconver*, *nthdenom*, *nthnumer*, *nthpow*, *order*, *pdexpand*, φ, π, *pprimroot*, *primroot*, *quadres*, *rootsunity*, *safeprime*, σ, *sq2factor*, *sum2sqr*, τ, *thue*]

```
> ?numtheory
```

La commande de la librairie *numtheory* qui permet de calculer les diviseurs d'un nombre entier est *divisors* (pour consulter son aide, taper *?numtheory[divisors]*)

```
> n:=478965400;
```

$$n := 478965400$$

```
> divisors(n);
```

{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200, 271, 542, 1084, 1355, 2168, 2710, 5420, 6775, 8837, 10840, 13550, 17674, 27100, 35348, 44185, 54200, 70696, 88370, 176740, 220925, 353480, 441850, 883700, 1767400, 2394827, 4789654, 9579308, 11974135, 19158616, 23948270, 47896540, 59870675, 95793080, 119741350, 239482700, 478965400}

2) On remarque que la commande précédente retourne un *ensemble* de diviseurs. Pour calculer le nombre d'éléments d'un ensemble (ou d'une liste), on dispose de la commande *nops*.

```
> nops(%);
```

$$48$$

Certains ont remarqué, à juste titre, que la commande *tau* de la librairie permet de calculer le nombre de diviseurs :

```
> tau(n);
```

$$48$$

3) Il suffit de faire l'intersection de l'ensemble des diviseurs de *n* avec l'ensemble des diviseurs de 220925.

```
> divisors(n) intersect divisors(220925);
```

$$\{1, 5, 25, 8837, 44185, 220925\}$$

Exercice 2

Pour x entre 0 et 200, et y entre 0 et 200, on teste si l'équation est vérifiée (par *if*). Si c'est le cas, alors on demande d'afficher la solution [*x*, *y*] à l'aide de *print*.

```
> restart;
> for x from 0 to 200 do
      for y from 0 to 200 do
          if x^2-y^2=3640 then print([x,y]) fi;
      od;
  od;
```

$$[61, 9]$$
$$[79, 51]$$
$$[83, 57]$$
$$[101, 81]$$
$$[137, 123]$$
$$[187, 177]$$

Remarque : *RETURN* sert à afficher un résultat dans une procédure. En dehors d'une procédure, pour des boucles *for*, on utilise *print* pour afficher un résultat.

Exercice 3

1) On nous demande de définir une <u>*fonction*</u> dans Maple (x -> ...). Attention à bien employer exp(x) et non pas e^x pour l'exponentielle.

```
> restart;
> f:=x->x-2*exp(x)/(exp(x)-1);
```

$$f := x \to x - \frac{2\,\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x - 1}$$

La fonction *f* est définie pour tout *x*, sauf pour ceux tels que $\mathbf{e}^x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$.
L'ensemble de définition de *f* est donc : Df =]-∞,0[U]0,+∞[
On vérifie que *f* est continue sur les deux intervalles qui composent Df.

```
> iscont(f(x),x=-infinity..0);
```

$$\mathit{true}$$

```
> iscont(f(x),x=0..infinity);
```

$$\mathit{true}$$

2)

```
> limit(f(x),x=-infinity);
```

$$-\infty$$

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$\mathit{undefined}$$

```
> limit(f(x),x=0,left);
```

$$\infty$$

```
> limit(f(x),x=0, right);
```

$$-\infty$$

A cause des deux dernières limites, la courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3) On vérifie que $x - 2$ est asymptote en +∞ en montrant que la limite de $f(x) - (x - 2)$ quand x tend vers ∞ est 0.

```
> limit(f(x)-(x-2),x=infinity);
```

$$0$$

Donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote.
Position de la courbe par rapport à la droite asymptote :

```
> solve(f(x)-(x-2)>0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0))$$

```
> solve(f(x)-(x-2)<0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)$$

Donc pour x > 0, la courbe est au-dessous de la droite, et pour x < 0, la courbe est au-dessus de la droite.

4) On calcule la *fonction* dérivée par :

```
> g:=D(f);
```

$$g := x \to 1 - \frac{2\,\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x - 1} + \frac{2\,(\mathbf{e}^x)^2}{(\mathbf{e}^x - 1)^2}$$

```
> g(x);
```

$$1 - \frac{2\,\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x - 1} + \frac{2\,(\mathbf{e}^x)^2}{(\mathbf{e}^x - 1)^2}$$

ou bien par :

```
> g:=x->diff(f(x),x);
```

$$g := x \to \mathrm{diff}(\mathrm{f}(x), x)$$

```
> g(x);
```

$$1 - \frac{2\,\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x - 1} + \frac{2\,(\mathbf{e}^x)^2}{(\mathbf{e}^x - 1)^2}$$

Etude de son signe.

```
> normal(g(x));
```

$$\frac{(\mathbf{e}^x)^2 + 1}{(\mathbf{e}^x - 1)^2}$$

On voit que le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs pour $x \neq 0$. On peut le vérifier :

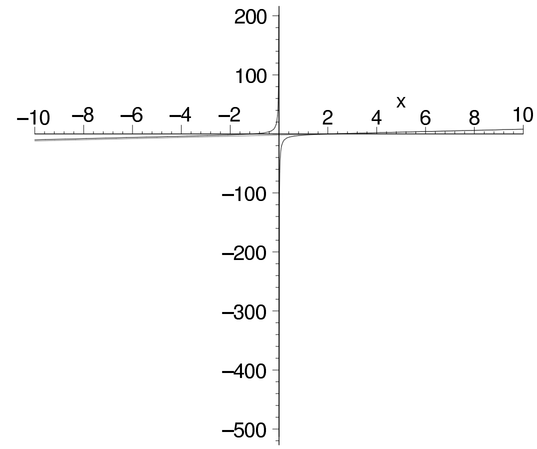
```
> solve(g(x)>0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)$$

On en déduit que f est strictement croissante sur]-∞,0[U]0,+∞[.

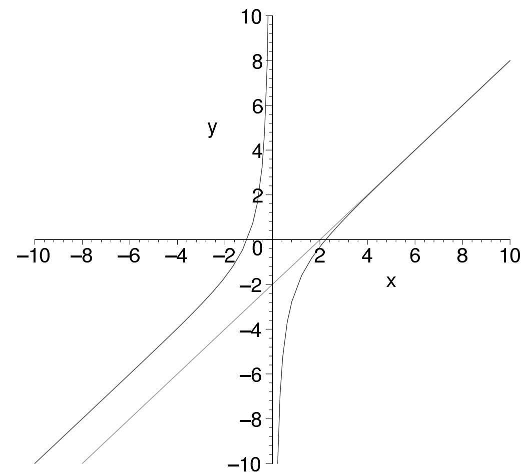
5)

```
> plot([f(x),x-2],x);
```



On recadre en ordonnée, par exemple comme ceci, pour faire apparaitre la courbe et son asymptote.

```
> plot([f(x),x-2],x,y=-10..10);
```



Remarque : comme je l'ai dit lors de la correction du controle, évitez d'employer *infinity* comme borne de l'intervalle d'affichage dans *plot*. Cela donne des graphes qui sont "déformés" au voisinage de l'infini. Essayez `plot(sin(x),x=-infinity..infinity);` pour vous en convaincre.

6)

```
> f(2) ; f(-1) ;
```

$$2-\frac{2\,\mathbf{e}^2}{\mathbf{e}^2-1}$$

$$-1-\frac{2\,\mathbf{e}^{(-1)}}{\mathbf{e}^{(-1)}-1}$$

```
> evalf(f(-2)); evalf(f(-1));
```

-1.686964715

0.163953414

On a $f(-2)<0$ et $f(-1)>0$. De plus, *f* est continue et strictement croissante sur I=[-2,-1] donc c'est une bijection de I sur J=f([-2,-1]). Comme 0 est dans J, il existe un unique $a \in I$ tel que $f(a)=0$.

7)

```
> fsolve(f(x)=0,x);
```

2.238645835

Attention ! *fsolve* nous donne une valeur approchée, mais qui n'est pas entre -2 et -1. En regardant le graphique précédent, on voit que *f* a deux zéros: *a* et un autre qui est situé entre 2 et 4. *fsolve* nous a donné par défaut une valeur approchée de cet autre zéro. Pour obtenir une valeur approchée de *a*, on demande à *fsolve* de chercher une solution sur [-2,-1] (consultez l'aide sur fsolve si vous ne vous souvenez plus de la syntaxe)

```
> fsolve(f(x)=0,x=-2..-1);
```

-1.060090320