Université Paris 7 - Denis Diderot
L1
MK1 - MAPLE
Mardi 10 Janvier

Année 2005-2006
Fabrice Mathurin
mathurin@math.jussieu.fr

Examen MK1

L'examen est composé de 6 exercices indépendants. Il suffit de faire entièrement 4 exercices pour obtenir la note maximale. Il ne faut pas en entamer plus que 4, seuls les 4 premiers exercices de votre copie seront notés. Toutes les réponses sont à reporter sur les feuilles d'examen Les justifications comporteront essentiellement les lignes de codes Maple et des explications succintes pour expliquer précisément ce qui vous amène aux conclusions.
Nous tiendrons grandement compte de la clarté de la rédaction et de la syntaxe.
Aucun document n'est autorisé. Les portables doivent être éteints (sous peine d'annulation de la copie), les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Analyse (5 points)) *Vous répondrez aux questions, et donnerez les lignes de codes nécessaires à l'affichage des résultats dans les situations classiques d'analyse suivante :*

1. *Quelles sont les limites de :*
   $ln(arctan(\frac{3x+1}{4x+\sqrt{3}}))$ *en* 0.
   $\frac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$ *en* 0 *par valeurs positives*
2. *Donnez les développements limités des fonctions suivantes*
   $e^{\cos(x)}$ *en* 0 *et à l'ordre* 7.
   $sin(\sqrt{x^2-3\pi^2})$ *en* 2π *et à l'ordre* 3
3. *Calculez les intégrales suivantes :*
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^3(x)}dx$
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}dx$
4. *Donnez une primitive de :*
   $arctan(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}})$
   $\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$
5. *Donnez la dérivée de :*
   $-\frac{1}{3}\ln(1+\cos(x))+\frac{1}{6}\ln(\cos^2(x)-\cos(x)+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctan(\frac{2\cos(x)-1}{\sqrt{3}})$
   $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Exercice 2 (Géométrie, Complexe (5 points)) *Prenons trois points A, B et C du plan d'affixes complexes respectives a, b et c. Donnez une condition algébrique sur les complexes pour qu'ils soient alignés.*
En utilisant votre formule, donnez un programme align *qui prend en entrée trois complexes et qui renvoie en sortie* true *si les trois points du plan correspondants sont alignés et* false *dans le cas contraire.*

Exercice 3 (Tracé (5 points)) *Nous allons étudier la fonction* $f : x \mapsto arccos(4x^3-3x)$.
Bien entendu, tout cet exercice est à résoudre avec Maple.

1. *Donnez le domaine de définition de la fonction.*
2. *Déterminez la valeur de la dérivée de cette fonction.*
3. *Calculez les limites aux bornes du domaine. Donnez les différentes branches asymptotiques.*
4. *Établissez le tableau de variation de f. Donnez un tableau de valeurs de f.*
5. *Réalisez le tracé du graphe de f. Pour cela vous réfléchirez à l'échelle la plus appropriée. Outre le tracé approximatif de f, vous préciserez la (ou les) commande(s) Maple utilisées.*

Exercice 4 (Boucles for (5 points)) *Écrivez un programme calculant la double somme des puissances $k^{ème}$ et $r^{ème}$ des entiers de 1 à n, c'est à dire :*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^k j^r$$

Ce programme prendra donc 3 entiers en entrée, n, k, r, utilisera des boucles for *et renverra la double somme* - i.e. *un entier.*

Exercice 5 (Résolution d'équations (5 points)) *Vous utiliserez Maple pour résoudre ces équations provenant de différentes situations mathématiques (pour les équations différentielles vous pouvez utiliser la fonction* dsolve*) :*

1. *Donnez les racines de $X^4 + 3X^2 + 1$.*
2. *Donnez les valeurs approchées des racines réelles de $X^6 - 13X^3 + 2X^2 - 1$ par une méthode de votre choix. (à 10^{-5} près)*
3. *Résoudre l'équation différentielle :*
$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$$
4. *Résoudre le système linéaire :*
$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x + 2y - 4z & = & 2 \\ 5y + 2z & = & -3 \\ x - y + 8z & = & 1 \end{array}\right.$$
5. *Résoudre l'équation différentielle :*
$$y^{(4)} - y = \cos(x)$$

Exercice 6 (Boucles "si" et "tant que" (5 points)) *On appelle ρ la fonction définie ainsi :*

$$x \in \mathbb{R}^+ \mapsto card\{n \in \mathbb{N}, n \leq x, n \quad \textit{premier}\}$$

en terme clair, $\rho(x)$ est le nombre d'entiers premiers plus petit que x.
En utilisant des boucles if ... then ... else ... fi *et* while ... do ... od *évoquez d'abord dans les grandes lignes le principe d'une procédure prenant en entrée un réel positif x et renvoyant $\rho(x)$ puis finalement donnez le code Maple.*
*Tracez sur un même graphe (*display*) et sur une grande échelle les fonctions ρ et $x \mapsto \frac{x}{ln(x)}$. Que pouvez-vous en déduire ?*