Université Paris 7 - Denis Diderot
L1
MK1 - MAPLE
Mardi 10 Janvier

Année 2005-2006
Fabrice Mathurin
mathurin@math.jussieu.fr

Examen MK1

L'examen est composé de 6 exercices indépendants. Il suffit de faire entièrement 4 exercices pour obtenir la note maximale. Il ne faut pas en entamer plus que 4, seuls les 4 premiers exercices de votre copie seront notés. Toutes les réponses sont à reporter sur les feuilles d'examen Les justifications comporteront essentiellement les lignes de codes Maple et des explications succintes pour expliquer précisément ce qui vous amène aux conclusions.
Nous tiendrons grandement compte de la clarté de la rédaction et de la syntaxe.
Aucun document n'est autorisé. Les portables doivent être éteints (sous peine d'annulation de la copie), les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Analyse (5 points)) *Vous répondrez aux questions, et donnerez les lignes de codes nécessaires à l'affichage des résultats dans les situations classiques d'analyse suivante :*

1. *Quelles sont les limites de :*
   $ln(arctan(\frac{3x+1}{4x+\sqrt{3}}))$ *en* 0.
   $\frac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$ *en* 0 *par valeurs positives*
2. *Donnez les développements limités des fonctions suivantes*
   $e^{\cos(x)}$ *en* 0 *et à l'ordre* 7.
   $sin(\sqrt{x^2-3\pi^2})$ *en* 2π *et à l'ordre* 3
3. *Calculez les intégrales suivantes :*
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^3(x)} dx$
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}} dx$
4. *Donnez une primitive de :*
   $arctan(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}})$
   $\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$
5. *Donnez la dérivée de :*
   $-\frac{1}{3}\ln(1+\cos(x)) + \frac{1}{6}\ln(\cos^2(x)-\cos(x)+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctan(\frac{2\cos(x)-1}{\sqrt{3}})$
   $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Exercice 2 (Géométrie, Courbes (5 points)) *Dans cet exercice vous préciserez les commandes tapées :*

a *Étudiez et tracez les courbes données par :*
   $\rho = \sin(\theta/4)$
   $\rho = \theta \cdot \sin(\theta)$
   $\rho = 1 + 4 \cdot \cos(3\theta)$

b *Tracez la courbe définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \sin(t) \\ y & = & \dfrac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{array} \right.$$

Exercice 3 (Tracé (5 points)) *Nous allons étudier la fonction* $f\colon x \mapsto arccos(4x^3 - 3x)$.

Bien entendu, tout cet exercice est à résoudre avec Maple.

1. *Donnez le domaine de définition de la fonction.*
2. *Déterminez la valeur de la dérivée de cette fonction.*
3. *Calculez les limites aux bornes du domaine. Donnez les différentes branches asymptotiques.*
4. *Établissez le tableau de variation de* f*. Donnez un tableau de valeurs de* f.
5. *Réalisez le tracé du graphe de* f*. Pour cela vous réfléchirez à l'échelle la plus appropriée. Outre le tracé approximatif de* f*, vous préciserez la (ou les) commande(s) Maple utilisées.*

Exercice 4 (Boucles for (5 points)) *Écrivez un programme calculant la double somme des puissances* $k^{ème}$ *et* $r^{ème}$ *des entiers de* 1 *à* n*, c'est à dire :*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^k j^r$$

Ce programme prendra donc 3 *entiers en entrée,* n, k, r*, utilisera des boucles* for *et renverra la double somme* - i.e. *un entier.*

Exercice 5 (Résolution d'équations (5 points)) *Vous utiliserez Maple pour résoudre ces équations provenant de différentes situations mathématiques (pour les équations différentielles vous pouvez utiliser la fonction* dsolve*) :*

1. *Donnez les racines de* $X^4 + 3X^2 + 1$.
2. *Donnez les valeurs approchées des racines réelles de* $X^6 - 13X^3 + 2X^2 - 1$ *par une méthode de votre choix. (à* 10^{-5} *près)*
3. *Résoudre l'équation différentielle :*
$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$$
4. *Résoudre le système linéaire :*
$$\left\{\begin{array}{ccc} 3x + 2y - 4z & = & 2 \\ 5y + 2z & = & -3 \\ x - y + 8z & = & 1 \end{array}\right.$$
5. *Résoudre l'équation différentielle :*
$$y^{(4)} - y = \cos(x)$$

Exercice 6 (Boucles "si" et "tant que" (8 points)) *Nous allons chercher dans cet exercice à simuler le jeu "plus grand, plus petit". Une personne cherche à deviner un nombre. Pour cela, elle peut interroger un oracle en lui proposant une valeur, et celui-ci répond simplement par l'une des trois réponses suivantes : "gagné", "plus grand" et "plus petit". On considère une variable globale* a *contenant le nombre à deviner. On rappelle que pour faire des tirages aléatoires, on utilise généralement la fonction* rand.

1. *Écrire une procédure qui prend en argument un entier naturel* $N \geq a$*, puis applique la méthode de recherche précédente afin de déterminer la valeur de* a *: on commence par choisir un nombre* b *entre* 1 *et* N *et on le compare à* a*. S'il est égal à* a*, on retourne le résultat, sinon on modifie le domaine de recherche en conséquence (dans* $[1, b-1]$ *si* $b > a$*, et dans* $[b+1, N]$ *si* $b < a$*), et ainsi de suite. La procédure pourra être itérative, ou récursive.*
2. *Modifiez la procédure précédente de manière à retourner également le nombre de tests réalisés.*
3. *Écrire enfin une procédure prenant en entrée un entier* N*, qui tire d'abord un nombre* a *compris entre* 1 *et* N*, puis applique la méthode précédente et retourne le nombre d'itérations nécessaires.*
4. *En évaluant la valeur moyenne du nombre d'itérations nécessaires pour une valeur donnée de* N*, donnez un lien entre ces deux valeurs.*