

Examen MK1

L'examen est composé de 6 exercices indépendants. Il suffit de faire entièrement 4 exercices pour obtenir la note maximale. Il ne faut pas en entamer plus que 4, seuls les 4 premiers exercices de votre copie seront notés. Toutes les réponses sont à reporter sur les feuilles d'examen. Les justifications comporteront essentiellement les lignes de codes Maple et des explications succinctes pour expliquer précisément ce qui vous amène aux conclusions. Nous tiendrons grandement compte de la clarté de la rédaction et de la syntaxe. Aucun document n'est autorisé. Les portables doivent être éteints (sous peine d'annulation de la copie), les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Analyse (5 points)) *Donnez les limites et les DLs des fonctions suivantes à l'ordre et au point précisé : (en fournissant les commandes Maple)*

- $\tan(2t) \cdot \ln(\tan(t))$ (à l'ordre 7 et en $\frac{\pi}{4}$)
- $\cos(t) \cdot e^{\frac{1}{t-\sin(t)}}$ (à l'ordre 2 et en $\frac{\pi}{2}$)
- $\cos(t)^{\tan(t^2)}$ (à l'ordre 11 et en 0)
- $(e^t + t)^{\frac{1}{t}}$ (à l'ordre 5 et en 0)
- $\cos(\arcsin(t))$ (à l'ordre 9 et en 0)

Exercice 2 (Suite (6 points)) *Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :*

$$u_0 = a; \quad \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$$

1. *Écrivez une procédure Maple prenant en entrée un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et un entier naturel n et renvoyant le n -ème terme de la suite.*
2. *Indiquez la valeur de u_{10} en fonction de a .*
3. *Étudiez la convergence de la suite en fonction de la valeur de a .*

Soient a et b dans \mathbb{R} . On considère la suite définie par :

$$u_0 = a; \quad u_1 = b; \quad \forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$$

1. *Écrivez une procédure Maple prenant en entrée un nombre réel $a \in \mathbb{R}$, un nombre réel $b \in \mathbb{R}$ et un entier naturel n et renvoyant le n -ème terme de la suite.*
2. *En prenant quelques exemples faites des simulations numériques. Que constatez-vous ?*

Exercice 3 (Tracé (5 points)) *Nous allons étudier la fonction $f: x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt$*

Bien entendu, tout cet exercice est à résoudre avec Maple.

1. *Donnez le domaine de définition de la fonction.*
2. *Déterminez la valeur de la dérivée de cette fonction.*
3. *Calculez les limites aux bornes du domaine. Donnez les différentes branches asymptotiques.*
4. **(Difficile)** *Établissez le tableau de variation de f . Donnez un tableau de valeurs de f .*
5. *Réalisez le tracé du graphe de f . Pour cela vous réfléchirez à l'échelle la plus appropriée. Outre le tracé approximatif de f , vous préciserez la (ou les) commande(s) Maple utilisées.*

Exercice 4 (Boucles for (5 points)) *Écrivez un programme calculant la double somme des puissances $k^{\text{ème}}$ et $r^{\text{ème}}$ des entiers de 1 à n , c'est à dire :*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^k j^r$$

Ce programme prendra donc 3 entiers en entrée, n, k, r , utilisera des boucles for et renverra la double somme - i.e. un entier.

Exercice 5 (Résolution d'équations (5 points)) Vous utiliserez Maple pour résoudre ces équations provenant de différentes situations mathématiques (pour les équations différentielles vous pouvez utiliser la fonction dsolve) :

1. Donnez les racines de $X^4 + 3X^2 + 1$.

2. Donnez les valeurs approchées des racines réelles de $X^6 - 13X^3 + 2X^2 - 1$ par une méthode de votre choix. (à 10^{-5} près)

3. Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$$

4. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 2 \\ 5y + 2z = -3 \\ x - y + 8z = 1 \end{cases}$$

5. Résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - y = \cos(x)$$

Exercice 6 (Divers (5 points)) 1. (Boucle While) Donnez le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $E(2005 \cdot (\frac{3}{2})^n)$ soit premier. Expliquez votre méthode. ($E(x)$ désigne la partie entière de x , i.e. le plus petit entier précédant x .)

2. (Matrices) On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 4}$ définie par $\forall 1 \leq i, j \leq 4, a_{i,j} = \frac{i-j}{i+j}$.

(a) Proposez une méthode permettant de définir directement la matrice (c'est-à-dire sans rentrer un à un les 16 coefficients).

(b) Donnez le rang de M .

(c) Calculez, si elle existe, l'inverse de la matrice A .