

MK1 "Calcul formel" Maple

TP1 : Premiers pas en Maple

Qu'est-ce que le "calcul formel" ?

Maple est un logiciel de calcul formel : il est capable de manipuler des nombres, mais aussi des symboles représentant des nombres ou des objets mathématiques plus compliqués (fonctions, équations,...). Il est beaucoup plus puissant qu'une calculatrice ordinaire, puisqu'il peut par exemple dériver une fonction, résoudre une équation,... de façon "abstraite".

Le but des TP MK1

Il s'agit d'apprendre à utiliser Maple en illustrant votre programme de mathématiques par des exemples et des exercices "à faire avec Maple". Bien entendu **cela suppose que vous connaissez votre cours de maths !** N'hésitez pas à amener votre cours avec vous lors des séances de TP.

Déroulement des TP

Le TP, d'une durée de deux heures, aura lieu en salle 207 (2ème étage, barre 24-34). **Merci d'arriver à l'heure !**

En fin de séance, *quand vous quittez la salle, merci de placer les claviers et les souris sur les écrans ou les ordinateurs*

Contrôle des connaissances

Les séances de TP seront sur 12 semaines, de la semaine du 26 septembre à la semaine du 12 décembre.

Pendant la session d'examens de janvier 2006, il y aura un examen *individuel* sur machine d'une durée de deux heures (note E).

Avant l'examen, il y aura plusieurs évaluations :

- un contrôle C1 la semaine du 17 octobre
- un partiel P la semaine du 7 novembre
- un contrôle C2 la semaine du 28 novembre

La note finale tiendra compte de l'examen et du contrôle continu par la formule :

$$\text{note finale} = (2E + P + (C1+C2)/2) / 4$$

Rappel : l'année n'est pas validée lorsqu'il y a une absence injustifiée à un examen.

Bibliographie

Parmi les livres de tous niveaux qui existent sur Maple, je vous recommande "*Maple sugar*", de Guy Le Bris (éd. Cassini) dont l'esprit correspond bien à ce que nous ferons en TP.

Et surtout, n'oubliez pas de vous (et de me) poser des questions !

1. Présentation de l'interface

- * La feuille blanche est appelée *feuille de calcul*. C'est là que vous donnez à Maple des commandes, qu'il les exécute et vous affiche le résultat. C'est l'analogue de l'écran d'une calculatrice ordinaire (mais on peut y afficher bien plus de choses !)
- * La feuille de calcul commence par une *invite* (symbole $\>$) : cela signifie que Maple est prêt à recevoir des commandes de l'utilisateur.
- * Si on tape alors une commande comme $1+2$ qu'on valide en appuyant sur la touche "Entrée" :

```
> 1+2
```

```
Warning, premature end of input
```

...on reçoit un message d'erreur.

Règle importante n°1: toute commande doit être suivie d'un caractère terminateur, la plupart du temps ; (point-virgule), parfois : (deux-points).

```
> 1+2;
```

```
3
```

Ouf !

Si on utilise deux-points à la place du point-virgule, Maple effectue la commande mais n'affiche pas le résultat. Cela peut être pratique quand le résultat donné par Maple prend trop de place à afficher, ou si la valeur exacte ne nous intéresse pas.

```
> 80!;
```

```
7156945704626380229481153372318653216558465734236575257710944505822703\  
9255480148842668944867280814080000000000000000000
```

```
> 80!:
```

* On peut donner plusieurs commandes à Maple sur la même ligne :

```
> 2^5; 11*7;
```

```
32
```

```
77
```

* Pour enregistrer sa feuille de calcul, on utilise le menu "File", "Save" ou "Save as". Le fichier a une extension *.mws*.

* Pour ouvrir une feuille enregistrée, on utilise le menu "File", "Open". Si on souhaite travailler à nouveau dessus, il faut alors re-exécuter toutes les commandes de la feuille, soit en les validant une à une avec la touche "Entrée", soit en utilisant le menu Edit, Execute, Worksheet.

2. L'affectation de variables

Il est très pratique de donner des noms à des résultats antérieurs, notamment pour pouvoir les réutiliser par la suite : c'est l'*affectation*. En voici un exemple :

```
> produit:=6!;
```

```
produit := 720
```

A gauche du signe $:=$, on entre le nom de la variable et à droite la valeur affectée. On peut vérifier l'affectation par :

```
> produit;
```

```
720
```

et l'utiliser pour faire de nouveaux calculs :

```
> produit/5!;
```

```
6
```

Le nom de variable ne doit pas comporter de signes de ponctuation, d'espace ni de caractères spéciaux (par ex. +, *, #, %, @). On peut utiliser des majuscules et des minuscules (attention ! *Maple différencie les deux !*). La procédure d'affectation est très générale. Ici, on a donné un

nom de variable à un nombre entier (6!) mais on peut nommer également des nombres rationnels, décimaux, complexes, des fonctions, des matrices,...

Pour réinitialiser (désaffecter) la variable *produit* et faire en sorte qu'elle ne contienne plus la valeur 6!, on effectue l'une ou l'autre des commandes suivantes:

```
> produit := 'produit';
```

produit := produit

```
> unassign('produit');
```

```
> produit;
```

produit

Si on veut réinitialiser toutes les variables, on utilise la commande *restart*.

3. L'ordre des commandes

Il est très important de comprendre que **le comportement de Maple dépend de l'ordre chronologique de validation des commandes, et non de l'ordre d'apparition sur la feuille de calcul.**

Dans une feuille de calcul, rien ne vous empêche de modifier une commande entrée précédemment : il suffit pour cela de remonter à la ligne qui vous intéresse (au clavier ou à la souris), de modifier la commande et de valider avec "Entrée". Cependant, attention à cette manipulation : il vaut mieux valider les commandes dans l'ordre dans lequel elles apparaissent dans la feuille de calcul, sous peine d'arriver à des choses bizarres... Par exemple :

```
> a:=3;
```

a := 3

```
> b:=a/2;
```

b := $\frac{3}{2}$

Si en remontant, je décide de modifier a:=3 en a:=2, mais que j'oublie de valider avec "Entrée" la ligne suivante, b vaudra toujours 3/2 et ne sera plus égal à a/2 !

Règle importante n°2 : si vous modifiez une commande précédente dans la feuille, faites re-exécuter les lignes suivantes à Maple avec la touche "Entrée".

Règle importante n°3 : il vaut mieux commencer une feuille de calcul par la commande :

```
> restart;
```

afin d'être certain que toutes les variables sont désaffectées.

4. L'aide de Maple

Maple est un logiciel très riche et il n'est pas question d'en connaître toutes les commandes et leurs syntaxes. L'aide de Maple est très utile pour retrouver ce genre d'informations, et **il est essentiel de savoir l'utiliser.**

* Si on veut des informations sur une commande dont on connaît le nom, il suffit de taper à l'invite ? suivi du nom de la commande (inutile de faire suivre d'un ;) :

```
> ?isprime
```

* Si on ne connaît pas le nom de la commande, on utilise le menu Help, Topic search pour une recherche thématique.

5. Calculs sur les nombres entiers

Maple fait automatiquement des calculs exacts sur de très grands entiers. Les opérations usuelles sont +,-,*.

Dans Maple, les différents objets ont un *type*. On peut demander le type d'un objet par la commande *whattype*. Par exemple, le type d'un entier est *integer*.

```
> whattype(15!);
```

integer

6. Calculs sur les nombres réels

La première façon d'approcher un nombre réel grâce à Maple est d'utiliser le point décimal (.). (c'est l'équivalent de notre virgule décimale). Maple calcule alors des valeurs *approchées*, avec un nombre de chiffres significatifs fixé (par défaut, dix).

```
> 300/45;
```

$\frac{20}{3}$

Pour Maple, le nombre précédent n'est pas un nombre réel, c'est un nombre rationnel (une fraction de deux nombres entiers) : d'ailleurs, il nous a proposé spontanément une simplification. Pour le lui faire comprendre comme un nombre réel (approché), on peut faire :

```
> 300./45;
```

6.666666667

ou bien :

```
> evalf(300/45);
```

6.666666667

Le type d'un réel est *float* (nombre flottant).

```
> whattype(300./45);
```

float

Maple connaît certains réels comme **e** :

```
> exp(1); evalf(exp(1));
```

e

2.718281828

et **pi** :

```
> Pi;
evalf(Pi);
```

π

3.141592654

(attention, P majuscule !)

On peut choisir le nombre de chiffres significatifs par :

```
> evalf(Pi,20);
```

3.1415926535897932385

Voici quelques fonctions prédéfinies de Maple. Utilisez l'aide pour en savoir plus :

exp
ln ou log
sqrt
sin, cos, tan
abs
trunc, floor, ceil
max(x1,x2,...,xn), min(x1,...,xn)

7. Calculs sur les nombres complexes

Pour définir un nombre complexe, on utilise le nombre imaginaire **i**, que Maple représente par **I** (**attention, i majuscule !**).

```
> z:=3+4*I;
```

z := 3 + 4 I

[Pour obtenir ses parties réelles et imaginaires :

[> Re(z); Im(z);

$$\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

[> z*(1+sqrt(2)*I);

$$(3+4I)(1+\sqrt{2}I)$$

[Pour forcer Maple à écrire le nombre sous forme cartésienne (partie réelle + i * partie imaginaire), on utilise evalc :

[> evalc(%);

$$3-4\sqrt{2}+(4+3\sqrt{2})I$$

[(la commande % sert à rappeler le résultat précédent - par ordre chronologique).

[Les commandes pour obtenir le nombre complexe conjugué, le module et l'argument sont :

[conjugate, abs, argument. Le module est un réel positif. L'argument (donné par Maple) est -pi < theta <= pi.

[> conjugate(z); abs(z); argument(z);

$$\begin{matrix} 3-4I \\ 5 \end{matrix}$$

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

[Pour définir un nombre complexe sous forme trigonométrique r. exp(i theta), où r est le module et theta l'argument, on utilise la commande polar (le premier argument est r, le deuxième theta) :

[> polar(3, Pi/6);

$$\text{polar}\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$$

[> evalc(%);

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}I$$

[Pour passer de l'écriture cartésienne (a+b*I) à l'écriture polaire, on utilise encore polar mais la syntaxe est différente :

[> polar(1+I);

$$\text{polar}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

8. Les fonctions simplify et assume

Lorsqu'un résultat obtenu par calcul algébrique n'a pas la forme voulue, certaines fonctions de Maple permettent d'y remédier. La fonction simplify est l'une d'entre elles. Elle est très riche, aussi nous ne regarderons que des exemples.

[> 4^(1/2)+4;

$$\sqrt{4}+4$$

[> simplify(%);

$$6$$

[> (sin(x))^4-(cos(x))^4;

$$\sin(x)^4 - \cos(x)^4$$

[> simplify(%);

$$1-2\cos(x)^2$$

[Un exemple important :

[> y:=sqrt(x^2);

$$y := \sqrt{x^2}$$

[> simplify(y);

$$\text{csgn}(x)x$$

[Quelle est la fonction csgn ? Le résultat est-il correct ?

[Par défaut, Maple ne sait rien de la variable non affectée x et la considère comme un nombre complexe. Si on suppose (assume en anglais) que x est positif, on peut encore simplifier l'expression :

[> simplify(y, assume=positive);

$$x$$

[La supposition est temporaire (le temps que la commande soit effectuée). Si on souhaite qu'elle soit permanente, c'est-à-dire jusqu'à la fin de la session ou jusqu'à ce que la variable soit réinitialisée, on utilise assume avec une syntaxe différente :

[> assume(x, positive);

[> simplify(y);

$$x\sim$$

[Le ~ (tilde) rappelle qu'une hypothèse a été faite sur la variable x.

FEUILLE D'EXERCICES N°1

EXERCICE 1. Une formule de Ramanujan. Soit :

$$k = (\sqrt{2}-1)^2(2-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2(\sqrt{8}-3\sqrt{7})(\sqrt{10}-3)^2(\sqrt{15}-\sqrt{14})(4-\sqrt{15})^2(6-\sqrt{35}).$$

Calculer $A = \frac{2}{\sqrt{210}} \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ avec 30 chiffres significatifs. Que pensez-vous du résultat ?

EXERCICE 2. Soit le nombre complexe $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. Calculer son module et son argument. Donner une valeur approchée de son argument.

EXERCICE 3. Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En utilisant Maple, démontrer que les points du plan d'affixes z , $z - 1$ et z^2 sont alignés.

EXERCICE 4. Soient a, b, c les trois racines du polynôme en z à coefficients complexes : $z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i)$. Calculer ces racines à l'aide de la commande *solve*. Montrer que les points du plan d'affixes respectives a, b, c forment un triangle équilatéral.

EXERCICE 5. On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0, i, j)$. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$. Pour $n \geq 1$, soit M_n le point d'affixe $z_n = a^n z_0$ où $a = i/2$. En utilisant la commande *seq* (consulter l'aide), construire la séquence des dix premiers termes de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mis sous forme cartésienne. Construire la séquence des modules des dix premiers termes de la suite.

EXERCICE 6. On rappelle la formule de Moivre :

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

En utilisant cette formule, donner les formules exprimant $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.