TP1

Exercice 1

```
> restart;
> k:=(sqrt(2)-1)^2*(2-sqrt(3))*(sqrt(7)-sqrt(6))^2*(8-3*sqrt(7))*
  (sqrt(10)-3)^2*(sqrt(15)-sqrt(14))*(4-sqrt(15))^2*(6-sqrt(35));
```

$k :=$

$$(\sqrt{2}-1)^2(2-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2(8-3\sqrt{7})(\sqrt{10}-3)^2(\sqrt{15}-\sqrt{14})(4-\sqrt{15})^2(6-\sqrt{35})$$

```
> A:=(-2/sqrt(210))*ln(k/4);
```

$A := -\frac{1}{105}\sqrt{210}\ \ln($

$$(\sqrt{2}-1)^2(2-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2(8-3\sqrt{7})(\sqrt{10}-3)^2(\sqrt{15}-\sqrt{14})(4-\sqrt{15})^2(6-\sqrt{35})/4)$$

```
> evalf(A,30);
```

$$3.14159265358979323847198212950$$

```
> evalf(A-Pi);
```

$$0.$$

Attention, le calcul ci-dessus a été effectué avec 10 chiffres significatifs. C'est un calcul *approché* . Cela ne signifie pas que A égale pi. D'ailleurs, si on augmente le nombre de chiffres significatifs :

```
> evalf(Pi-A,30);
```

$$-0.933874622\ 10^{-20}$$

Donc le nombre A est une approximation de pi à 10^(-20) près.

Exercice 2

```
> restart;
> z:=((1+I*sqrt(3))/(1-I))^20;
```

$$z := -\frac{(1+\sqrt{3}\,I)^{20}}{1024}$$

```
> abs(z);argument(z);
```

$$1024$$

$$\mathrm{argument}(-(1+\sqrt{3}\,I)^{20})$$

```
> simplify(argument(z));
```

$$\mathrm{argument}(-(1+\sqrt{3}\,I)^{20})$$

Maple ne sait pas simplifier algébriquement l'argument de *z*. Par contre, on peut lui demander une valeur *approchée :*

```
> evalf(argument(z));
```

$$-1.047197549$$

Exercice 3

```
> restart;
  z:=1/2+I*sqrt(3)/2;
```

$$z := \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

Rappel : A, B, C trois points du plan d'affixes zA, zB et zC. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs AB et AC sont colinéaires. Le vecteur AB a pour affixe zB-zA, le vecteur AC a pour affixe zC-zA. Les points sont alignés si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que zB-zA=k*(zC-zA), c'est-à-dire si le nombre complexe (zB-zA)/(zC-zA) est réel, c'est-à-dire s'il a une partie imaginaire nulle !

```
> Im((z-(z-1))/(z-z^2));
```

$$0$$

Donc les trois points sont alignés.

Exercice 4

```
> restart;
  S:=solve(z**3-(6+3*I)*z**2+(9+12*I)*z-9*(2+3*I));
```

$$S := 3+\sqrt{3}+\sqrt{3}\,I,\ 3-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,I,\ 3\,I$$

Maple nous donne l'ensemble des solutions S sous forme d'une *séquence* :

```
> whattype(S);
```

$$exprseq$$

C'est une collection *ordonnée* d'expressions séparées par des virgules. La commande pour appeler le kème membre de S est *S[k].*

```
> a:=S[1];b:=S[2];c:=S[3];
```

$$a := 3+\sqrt{3}+\sqrt{3}\,I$$
$$b := 3-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,I$$
$$c := 3\,I$$

Pour montrer que le triangle est équilatéral, on vérifie par exemple que les cotés AB, BC et CA ont meme longueur. La distance AB est donnée par le module du nombre complexe b-a (c'est-à-dire la norme du vecteur AB)..

```
> abs(a-b);abs(b-c);abs(c-a);
```

$$2\sqrt{6}$$
$$\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(-3-\sqrt{3})^2}$$
$$\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(-3-\sqrt{3})^2}$$

On peut encore simplifier ces expressions :

```
> abs(a-b);simplify(abs(b-c));simplify(abs(c-a));
```

$$2\sqrt{6}$$
$$2\sqrt{6}$$
$$2\sqrt{6}$$

Donc le triangle est équilatéral.

Exercice 5

```
> restart;
> z0:=1+I*sqrt(3);
```

$$z0 := 1+\sqrt{3}\,I$$

```
> a:=I/2;
```

$$a := \frac{1}{2}I$$

```
> seq(a^n*z0,n=1..10);
```

$$\frac{1}{2}I(1+\sqrt{3}\,I),\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}I\sqrt{3},\ \frac{-1}{8}I(1+\sqrt{3}\,I),\ \frac{1}{16}+\frac{1}{16}I\sqrt{3},\ \frac{1}{32}I(1+\sqrt{3}\,I),\ -\frac{1}{64}-\frac{1}{64}I\sqrt{3},$$

$$\frac{-1}{128} I (1+\sqrt{3}\, I), \frac{1}{256}+\frac{1}{256} I \sqrt{3}, \frac{1}{512} I (1+\sqrt{3}\, I), -\frac{1}{1024}-\frac{1}{1024} I \sqrt{3}$$

```
> seq(evalc(a^n*z0),n=1..10);
```

$$\frac{1}{2} I-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} I \sqrt{3}, -\frac{1}{8} I+\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{16}+\frac{1}{16} I \sqrt{3}, \frac{1}{32} I-\frac{\sqrt{3}}{32}, -\frac{1}{64}-\frac{1}{64} I \sqrt{3}, -\frac{1}{128} I+\frac{\sqrt{3}}{128},$$
$$\frac{1}{256}+\frac{1}{256} I \sqrt{3}, \frac{1}{512} I-\frac{\sqrt{3}}{512}, -\frac{1}{1024}-\frac{1}{1024} I \sqrt{3}$$

```
> seq(abs(a^n*z0),n=1..10);
```

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}$$

Exercice 6

```
> restart;
  z:=(cos(x)+I*sin(x))^5;Re(z);Im(z);
```

$$z := (\cos(x)+\sin(x)\, I)^5$$
$$\Re((\cos(x)+\sin(x)\, I)^5)$$
$$\Im((\cos(x)+\sin(x)\, I)^5)$$

```
> evalc(z);
```

$$\cos(x)^5-10\cos(x)^3\sin(x)^2+5\cos(x)\sin(x)^4$$
$$+(5\cos(x)^4\sin(x)-10\cos(x)^2\sin(x)^3+\sin(x)^5)\, I$$

Il suffit alors d’extraire les parties réelles et imaginaires. Pourtant :

```
> Re(evalc(z));
```

$$\Re(\cos(x)^5-10\cos(x)^3\sin(x)^2+5\cos(x)\sin(x)^4$$
$$+(5\cos(x)^4\sin(x)-10\cos(x)^2\sin(x)^3+\sin(x)^5)\, I)$$

La commande qui fonctionne ici est la suivante : on demande d’abord à Maple de calculer formellement la partie réelle de z, puis on demande de faire une évaluation complexe (*evalc*) :

```
> evalc(Re(z));
  evalc(Im(z));
```

$$\cos(x)^5-10\cos(x)^3\sin(x)^2+5\cos(x)\sin(x)^4$$
$$5\cos(x)^4\sin(x)-10\cos(x)^2\sin(x)^3+\sin(x)^5$$

Attention, si on utilise *evalf* (évaluation approchée des nombres réels à 10 chiffres significatifs près) à la place de *evalc*, on n’obtient pas le résultat voulu :

```
> evalf(Re(z));
```

$$\Re((\cos(x)+1.\, I\sin(x))^5)$$

```
>
```