Correction du TP3

Exercice 1

```
> restart; S:=solve(x^2+2*b*x+c=0,x);
```

$$S := -b+\sqrt{b^2-c},\ -b-\sqrt{b^2-c}$$

La *liste* des solutions est :

```
> L:=[S];
```

$$L := [-b+\sqrt{b^2-c},\ -b-\sqrt{b^2-c}]$$

Pour b=1 et c=2, les solutions sont :

```
> subs(b=1,c=2,L);
```

$$[-1+I, -1-I]$$

```
> subs(b=1,c=2,S);
Error, wrong number (or type) of parameters in function subs
```

Attention, la fonction *subs* permet de substituer des valeurs dans des *ensembles* ou des *listes* d'équations, pas dans des séquences : c'est pour cela qu'on a transformé la séquence S des solutions retournée par *solve* en une liste L.

On constate que pour b=1 et c=2, les solutions sont des nombres complexes (avec une partie imaginaire non nulle). Dans ce cas, le discriminant b^2-c est un nombre négatif. Pour Maple, sa "racine carrée" est un nombre complexe. Conclusion : Maple utilise le signe "racine carrée" meme pour les nombres négatifs ! En fait, il utilise meme ce symbole pour les nombres complexes. Si on se donne un nombre complexe, il a deux "racines carrées" possibles : Maple choisit celle des deux (qu'on note z) telle que :
Re(z)>=0 ou (Re(z)=0 et Im(z)>=0).

Exercice 2

```
> restart; S:=solve(x^3-5*x^2-2=0,x);
```

$$S := \frac{(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}{3}+\frac{25}{3\,(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}+\frac{5}{3},\ -\frac{(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}{6}$$
$$-\frac{25}{6\,(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}+\frac{5}{3}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}{3}-\frac{25}{3\,(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}\right),$$
$$-\frac{(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}{6}-\frac{25}{6\,(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}+\frac{5}{3}$$
$$-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}{3}-\frac{25}{3\,(152+3\sqrt{831})^{(1/3)}}\right)$$

Une valeur approchée de la première solution est :

```
> evalf(S[1]);
```

$$5.077574223$$

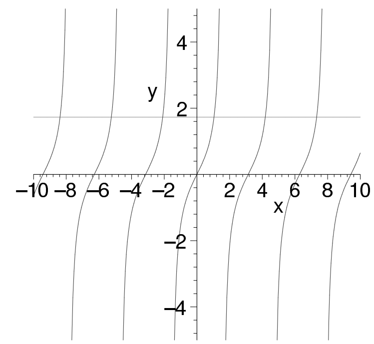
Exercice 3

```
> restart; solve(tan(x)=sqrt(3),x);
```

$$\frac{\pi}{3}$$

Maple nous donne une solution. Pourtant, la fonction tangente est 2*Pi périodique. Représentons graphiquement les deux fonctions :

```
> plot([tan(x),sqrt(3)],x, y=-5..5,discont=true);
```



On voit que l'équation a en réalité une infinité de solutions ! Ce sont les translatés de Pi/3 par 2*Pi. Vérifions-le par exemple pour Pi/3 + 2*Pi :

```
> tan(Pi/3 + 2*Pi);
```

$$\sqrt{3}$$

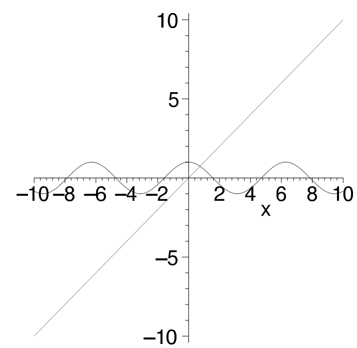
Dans ce cas, Maple ne nous a pas donné toutes les solutions.

```
> restart; s:=solve(cos(x)=x,x);
```

$$s := \mathrm{RootOf}(-\_Z+\cos(\_Z))$$

Ici, Maple refuse d'expliciter la solution.

```
> plot([cos(x),x],x);
```



On peut cependant demander une valeur approchée :

```
> evalf(s);
```

$$0.7390851332$$

```
> restart; solve(sqrt(x^2)=x,x);
```

$$x$$

Cette réponse signifie que tout x est solution, ce qui est faux si x est négatif : par exemple

```
> subs(x=-1,sqrt(x^2)=x);
```

$$1 = -1$$

Malheureusement, ici, Maple nous a donné des solutions qui n'en sont pas !

Exercice 4

L'approche naive est de demander à Maple de résoudre directement |z| = |z-1|.

```
> restart;
  eq:=abs(z)=abs(z-1);
  solve(eq,z);
```

$$eq := |z| = |z-1|$$

$$\frac{1}{2}$$

Manifestement, il manque des solutions, par exemple z=1/2+i :

```
> simplify(subs(z=1/2+I,eq));
```

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

En fait, si on regarde l'aide de Maple à propos de *solve*, on y lit que si *abs* est utilisé dans une commande *solve*, Maple suppose que l'argument de la fonction *abs* est à valeur réelle. Ce qui n'est pas le cas ici, puisqu'on s'intéresse aux solutions complexes z de l'équation. On va tenter une deuxième approche.

```
> z:=x+I*y;
  eq;
  solve(eq,{x,y});
```

$$z := x + y\,I$$

$$|x + y\,I| = |x + y\,I - 1|$$

$$\{x = -y\,I + \frac{1}{2},\ y = y\}$$

Cette fois, Maple nous donne une famille de solutions. Malheureusement, d'après son expression, x peut etre un nombre complexe. Or, on veut que x et y soient les parties réelles et imaginaires de z, c'est-à-dire des nombres réels. Le problème vient du fait que Maple ne sait rien à propos de x et y, et suppose par défaut que ce sont des complexes ! Qu'à cela ne tienne, faisons supposer à Maple que ce sont des réels.

```
> assume(x,real);assume(y,real);
  solve(eq,{x,y});
```

$$\{y\sim = y\sim,\ x\sim = \frac{1}{2}\}$$

Cette fois, c'est bon. L'ensemble des solutions est {z=1/2+I*y, pour y réel quelconque}. Géométriquement, c'est la droite verticale d'abscisse 1/2.

Exercice 5

```
> restart; diff(tan(x),x); diff(ln(x^3+a*x^2+1),x);
```

$$1 + \tan(x)^2$$

$$\frac{3\,x^2 + 2\,a\,x}{x^3 + a\,x^2 + 1}$$

```
> restart; f:=x->1+x^5; g:=x->ln(x);
```

$$f := x \to 1 + x^5$$

$$g := x \to \ln(x)$$

La fonction composée gof s'obtient par g@f.

```
> (g@f)(x);
```

$$\ln(1 + x^5)$$

La dérivée de gof peut s'obtenir de deux façons, par :

```
> diff((g@f)(x),x);
```

$$\frac{5\,x^4}{1 + x^5}$$

ou par :

```
> D(g@f);
  D(g@f)(x);
```

$$\left(\left(x \to \frac{1}{x}\right)@f\right)(x \to 5\,x^4)$$

$$\frac{5\,x^4}{1 + x^5}$$

Pour la séquence de f'(i), i=1 à 20 : la commande :

```
> diff(f(x),i);
```

$$0$$

... ne fournit pas f'(i) : en fait, elle demande à Maple de dériver l'expression f(x) par rapport à la variable i. Comme f(x) ne dépend pas de i, cette dérivée est nulle. Pour y remédier, il faut définir la *fonction* f', par exemple grace à l'opérateur *D*.

```
> fprime:=D(f);
  fprime(i);
```

$$fprime := x \to 5\,x^4$$

$$5\,i^4$$

On peut alors construire la séquence à l'aide de *seq* :

```
> seq(fprime(i),i=1..20);
```

5, 80, 405, 1280, 3125, 6480, 12005, 20480, 32805, 50000, 73205, 103680, 142805, 192080, 253125, 327680, 417605, 524880, 651605, 800000

Exercice 6

```
> int((sin(x)*tan(x)+cos(x))/(sin(x)-cos(x)^2),x);
```

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin(x) - 1) - \frac{1}{2}\ln(1 + \sin(x)) + \frac{1}{2}\ln(\sin(x) - 1 + \sin(x)^2)$$
$$-\frac{1}{5}\sqrt{5}\ \mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{5}(1 + 2\sin(x))\sqrt{5}\right)$$

```
> int(ln(x^2+1),x);
```

$$x\ln(x^2 + 1) - 2\,x + 2\arctan(x)$$

Exercice 7

```
> restart; n:=int(exp(-t^2),t=0..1);
```

$$n := \frac{1}{2}\mathrm{erf}(1)\sqrt{\pi}$$

Maple nous donne un résultat exprimé à l'aide de la fonction spéciale *erf* (regardez l'aide sur *erf* pour avoir plus d'informations sur cette fonction). On peut lui demander une valeur *approchée* de l'intégrale :

```
> evalf(n);
```

$$0.7468241330$$