C. Armana
armana@math.jussieu.fr

MK1 "Calcul formel" Maple

TP4 : Limites, continuité

Commandes pour les caractères spéciaux
Voici les commandes pour obtenir les caractères qui ne sont pas présents sur les claviers Mac.
pour { : Alt (pour [: Alt Shift (
pour } : Alt)   pour] : Alt Shift)

Controle des connaissances - changement de planning
Avant l'examen, il y aura plusieurs évaluations :
- un controle C la semaine du 17 octobre (durée : 30 min)
- un partiel P : le 4 novembre pour le groupe 1D5, le 8 novembre pour le groupe 1A5 (durée : 1h)
- un devoir à la maison DM : le sujet est donné la semaine du 21 novembre, à rendre la semaine du 5 décembre

La note finale tiendra compte de l'examen et du controle continu par la formule :
note finale = (4E + 2P + C + DM)/8
Rappel : l'année n'est pas validée lorsqu'il y a une absence injustifiée à un examen.

Et surtout, n'oubliez pas de vous (et de me) poser des questions !

1. Limites

Pour calculer des limites d'expressions en une variable, on utilise la commande *limit* avec la syntaxe *limit(expression_en_x,x=a).* La valeur de *x* pour laquelle on cherche la limite de l'expression est *a*.

```
> restart; f:=x->(1-cos(x))/x^2 ;
```

$$f := x \to \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

La fonction f n'est pas définie en 0, mais a une limite (finie) en 0 que Maple peut calculer :

```
> f(0);
  limit(f(x),x=0);
Error, (in f) numeric exception: division by zero
```

$$\frac{1}{2}$$

a peut valoir + l'infini et -l'infini (infinity et -infinity) :

```
> limit(ln(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

```
> limit(1/x,x=0);
```

undefined

Ici, Maple répond 'undefined' car la fonction x->1/x n'a pas de limite en 0. Par contre, elle a une limite à gauche et une limite à droite :

```
> limit(1/x,x=0,left); limit(1/x,x=0,right);
```

$$-\infty$$

$$\infty$$

Pour définir une suite dont on connaît le terme général, on procède comme pour une fonction "ordinaire" : par exemple, pour la suite u_n définie par u_n=cos(1/n) :

```
> u:=n->cos(1/n);
```

$$u := n \to \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut alors utiliser la commande *limit* pour calculer la limite :

```
> limit(u(n),n=infinity);
```

$$1$$

2. Continuité d'une fonction

Maple dispose de commandes pour étudier la continuité et la discontinuité des fonctions de **R** dans **R**.
La commande *iscont* permet de tester la continuité d'une expression en *x* sur un intervalle donné. Le résultat donné par Maple est un booléen : *true* (vrai) si la fonction est continue sur l'intervalle, *false* (faux) si elle ne l'est pas. La syntaxe est *iscont(expression_en_x,x=a..b)* .

```
> restart; f:=x->1/(x-1);
  iscont(f(x),x=0..2);
```

$$f := x \to \frac{1}{x-1}$$

false

Ici, f n'est pas continue sur l'intervalle 0..2 car elle n'est pas continue en 1. Attention, par défaut, Maple étudie la continuité sur l'intervalle *ouvert*]a,b[. Par exemple, :

```
> iscont(f(x),x=0..1);
```

true

car *f* n'est pas continue au point 1, mais l'est sur l'intervalle ouvert en 1]0,1[. Il est possible de lui demander de travailler sur l'intervalle *fermé* [a,b] :

```
> iscont(f(x),x=0..1,'closed');
```

false

La commande *discont* donne l'ensemble des points de discontinuité. Sa syntaxe est *discont(expression_en_x,x).*

```
> discont(f(x),x);
```

$$\{1\}$$

```
> discont(1/sin(x),x);
```

$$\{\pi\, \_Z1\sim\}$$

(Quel est l'ensemble des points de discontinuité ? Essayez de comprendre la dernière réponse de Maple)

Université Paris 7
Licence 1ère année

Premier semestre 2005-2006
MK1 - Maple

Feuille d'exercices n°4

Exercice 1. Etude de fonction à l'aide de Maple

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$f(x) = x^{\frac{x}{1-x}}.$$

1) Donnez le domaine de définition de f. Vérifiez que f est continue sur son domaine de définition Df.
2) Etudiez les limites de f aux bornes des intervalles qui composent Df. Le graphe de f admet-il une asymptote ? Si oui, quelle est-elle ?
3) Calculez la dérivée de f. Etudiez son signe (on pourra arranger l'expression de la dérivée à l'aide de la commande *normal*, puis utiliser une fonction auxiliaire g pour l'étude du signe). Qu'en déduisez-vous pour f ?
4) Tracez le graphe de f.
5) Expliquez (d'un point de vue mathématique) comment prolonger f par continuité aux points 0 et 1.
6) Etudiez la dérivabilité de ce prolongement aux points 0 et 1. Quelle interprétation géométrique pouvez-vous faire ? Tracez le graphe correspondant.