Correction du TP n°4

Exercice 1

1)

```
> restart; f:=x-> x^(x/(1-x));
```

$$f := x \to x^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}$$

```
> discont(f(x),x);
```

$$\{0, 1\}$$

La fonction f, définie pour x>0, n'est pas continue en 0 et en 1. Son domaine de définition est]0,1[U]1, +oo[.

```
> iscont(f(x),x=0..1);
  iscont(f(x),x=1..infinity);
```

true

true

Donc f est continue sur son domaine de définition. Remarque : par défaut, Maple considère des intervalles ouverts ; si on ferme un des intervalles en 1, la réponse n'est plus la même car f n'est pas continue en 1 :

```
> iscont(f(x),x=0..1,'closed');
```

false

2) On étudie la limite de f en 0, 1 et +oo.

```
> limit(f(x),x=0,right);
```

$$1$$

En 1, il faut distinguer les limites à gauche et à droite :

```
> limit(f(x),x=1,left);
  limit(f(x),x=1,right);
```

$$\mathbf{e}^{(-1)}$$

$$\mathbf{e}^{(-1)}$$

On remarque que les deux limites à gauche et à droite sont égales.

```
> limit(f(x),x=infinity);
```

$$0$$

Donc la courbe représentant la fonction f admet une asymptote au voisinage de + l'infini, et cette asymptote est l'axe des abscisses (y=0).

3) La dérivée de f est :

```
> diff(f(x),x);
```

$$x^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}\left(\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}\right)\ln(x)+\frac{1}{1-x}\right)$$

```
> normal(%);
```

$$\frac{x^{\left(-\frac{x}{-1+x}\right)}(\ln(x)+1-x)}{(-1+x)^2}$$

Le dénominateur est positif, ainsi que le terme $x^{\left(-\frac{x}{x-1}\right)}$. La dérivée est donc du même signe que la fonction $\ln(x)+1-x$.

```
> g:=x->ln(x)+1-x;
```

$$g := x \to \ln(x)+1-x$$

```
> solve(g(x)=0,x);
```

$$1$$

```
> solve(g(x)<0,x);
```

$$\text{RealRange}(\text{Open}(0), \text{Open}(1)), \text{RealRange}(\text{Open}(1), \infty)$$

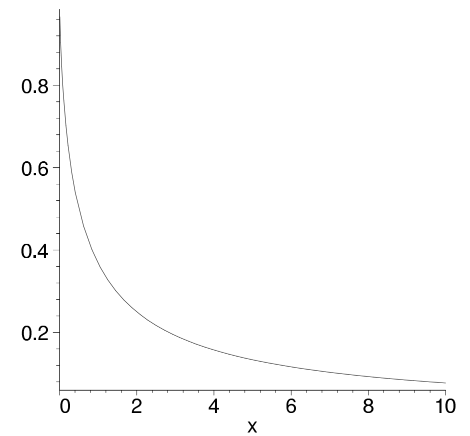
La fonction *g* s'annule en 1. Elle est strictement négative sur l'intervalle]0,1[U]1, +oo[.

```
> solve(g(x)>0,x);
```

Elle n'est jamais strictement positive sur *Df*. Sur *Df*, elle est négative ou nulle. Cela signifie que *f* est décroissante sur *Df*.

4) Le graphe de f est :

```
> plot(f(x),x=0..10);
```



5) On a vu que la limite de f au point 0 est 1, donc on peut prolonger *f* de façon continue en 0 par f(0)=1.

On a vu que les limites de f à gauche et à droite en 1 sont égales et valent $e^{(-1)}$. On peut donc prolonger f de façon continue en 1 par $f(1)=e^{(-1)}$.

6) Cherchons si f, prolongée par continuité, est dérivable en 0. Pour cela, on regarde la limite du taux d'accroissement en 0 :

```
> f(0):=1; f(1):=exp(-1);
```

$$f(0) := 1$$

$$f(1) := \mathbf{e}^{(-1)}$$

(cela permet de définir f aux points 0 et 1)

```
> limit( (f(x)-f(0)) / (x-0) , x=0, right);
```

$$-\infty$$

La limite est infinie, donc le prolongement de f n'est pas dérivable en 0. Géométriquement, cela signifie que la tangente au graphe de f en le point (0,1) est la droite Oy.

```
> limit ( (f(x)-f(1)) / (x-1), x=1, left);
  limit ( (f(x)-f(1)) / (x-1), x=1, right);
```

$$-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-1)}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(-1)}$$

Les limites du taux d'accroissement en 1 à gauche et à droite sont finies et égales, donc le prolongement de f est dérivable en 1, et f '(1) = $-\frac{1}{2\,e}$. Géométriquement, cela signifie que la droite tangente au point $(1, \frac{1}{e})$ a pour pente $\frac{1}{e}$. L'équation de cette tangente est :

```
> tangente:=x->f(1)-1/(2*exp(1))*(x-1);
```

$$tangente := x \to \mathrm{f}(1) - \frac{1}{2}\frac{x-1}{\mathbf{e}}$$

On trace sur un meme graphique la fonction et sa tangente :

```
> plot([f(x),tangente(x)],x=0..10,color=[red,blue]);
```