Correction du TP n°7

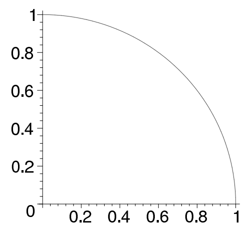
Exercice 1

1) La période est π donc on prend comme intervalle d'étude $[0, \pi]$.

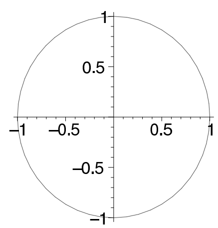
$x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc symétrie par rapport à Oy. On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète la courbe par symétrie.

$x\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -x(t)$ et $y\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -y(t)$ donc symétrie centrale par rapport à O. On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et on complète par symétrie.

```
> restart;
  x:=t->sin(2*t):
  y:=t->cos(2*t):
> plot([x(t),y(t),t=0..Pi/4]);
```



```
> plot([x(t),y(t),t=0..Pi]);
```



La courbe obtenue est le cercle de rayon 1. C'est la même que dans le premier exemple du cours, sauf qu'elle est parcourue deux fois plus rapidement.

2)

```
> restart;
  x:=t->cos(t):
  y:=t->(1+cos(t))*sin(t):
```

La période est 2π. L'intervalle d'étude est $[0, 2\pi]$.
$x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc la courbe est symétrique par rapport à Ox. On étudie sur $[0, \pi]$ et on complète par symétrie.

```
> xx:=D(x);yy:=D(y);
```

$$xx := t \to -\sin(t)$$

$$yy := t \to -\sin(t)^2 + (1+\cos(t))\cos(t)$$

```
> solve(xx(t)=0,t);
  solve(yy(t)=0,t);
```

$$0$$

$$\pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

(Maple ne donne pas toutes les solutions)

```
> solve(xx(t)>=0,t);
  solve(yy(t)>=0,t);
```

Apparemment, Maple n'est pas à l'aise avec les inéquations faisant intervenir des sin et cos. On étudie alors le signe à la main.

```
> x(0);y(0); # point à tangente verticale
```

$$1$$

$$0$$

```
> xx(Pi);yy(Pi);
```

$$0$$

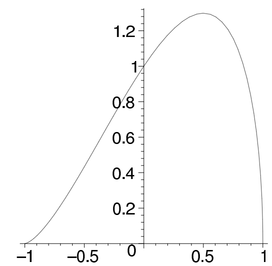
$$0$$

```
> x(Pi);y(Pi); # donc ce point est singulier (stationnaire)
```

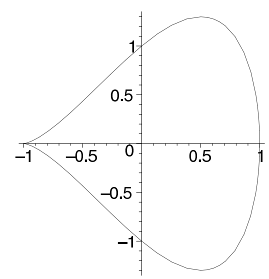
$$-1$$

$$0$$

```
> plot([x(t),y(t),t=0..Pi]);
```



```
> plot([x(t),y(t),t=0..2*Pi]);
```



3)

```
> restart;
> x:=t->t/ln(t):
  y:=t->t^2/(t-1):
```

Domaine de définition pour t : $]0,1[\ \mathrm{U}\ ]1,+\infty[$. Pas de périodicité ni de symétrie.
Limites :

```
> limit(x(t),t=0);
  limit(y(t),t=0);
```

$$0$$

$$0$$

```
> limit(x(t),t=1);
  limit(y(t),t=1);
```

$$undefined$$
$$undefined$$

```
> limit(x(t),t=1,left);limit(x(t),t=1,right);
  limit(y(t),t=1,left);limit(y(t),t=1,right);
```

$$-\infty$$
$$\infty$$
$$-\infty$$
$$\infty$$

```
> limit(x(t),t=infinity);
  limit(y(t),t=infinity);
```

$$\infty$$
$$\infty$$

Variations :

```
> xx:=D(x);yy:=D(y);
```

$$xx := t \to \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{\ln(t)^2}$$
$$yy := t \to \frac{2\,t}{t-1} - \frac{t^2}{(t-1)^2}$$

```
> solve(xx(t)=0,t);
  solve(yy(t)=0,t);
```

$$\mathbf{e}$$
$$0, 2$$

```
> solve(xx(t)>0,t);
  solve(yy(t)>0,t);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(\mathbf{e}), \infty)$$
$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(2), \infty)$$

Branche infinie en 1

```
> limit(y(t)/x(t),t=1);
```

$$1$$

Donc on étudie la limite de y(t)-x(t) :

```
> limit(y(t)-x(t),t=1);
```

$$\frac{1}{2}$$

Donc la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe quand t -> 1.

Remarque : on pouvait aussi l'obtenir par des développements généralisés :

```
> series(x(t),t=1,3);
  series(y(t),t=1,3);
```

$$(t-1)^{-1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{12}(t-1) - \frac{1}{24}(t-1)^2 + O((t-1)^3)$$
$$(t-1)^{-1} + 2 + t - 1$$

Donc

```
> series(x(t)-y(t)+1/2,t=1,3);
```

$$-\frac{7}{12}(t-1) - \frac{1}{24}(t-1)^2 + O((t-1)^3)$$

ce qui montre que la limite de x(t)-y(t)+1/2 quand t->1 est nulle.

Branche infinie en $+\infty$:

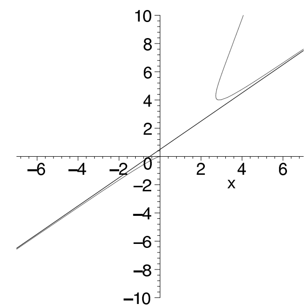
```
> limit(y(t)/x(t),t=infinity);
```

$$\infty$$

Donc la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique Oy quand t tend vers ∞.

Tracé de la courbe et de son asymptote :

```
> with(plots):
> ?plots[display]
> A:=plot([x(t),y(t),t=-10..10],-7..7,-10..10): #attention à bien
  mettre : en fin de ligne
  B:=plot(x+1/2,x=-7..7,color=blue): # même remarque
  display([B,A]);
```



4) x a pour période 2π et y a pour période $\frac{10\pi}{3}$. Donc (x, y) a pour période 10π.

$x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc sur une période, la courbe est décrite <u>deux fois</u>. On se ramène à l'intervalle d'étude $[0, 5\pi]$.

$x(5\pi - t) = -x(t)$ et $y(5\pi - t) = -y(t)$ donc symétrie centrale par rapport à O. On étudie sur $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ et on complète par symétrie.

```
> restart;
  x:=t->cos(t):
  y:=t->cos(3*t/5):
```

Variations :

```
> xx:=D(x); yy:=D(y);
```

$$xx := t \to -\sin(t)$$
$$yy := t \to -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{3}{5}t\right)$$

```
> solve(xx(t)<0,t);
> solve(xx(t)=0,t);
  solve(yy(t)=0,t);
```

$$0$$
$$0$$

Apparemment, Maple n'est pas à l'aise avec les inéquations et équations faisant intervenir des sin et cos. On étudie alors le signe à la main.

```
> x(0);y(0);
```

$$1$$
$$1$$

```
> x(Pi);y(Pi);evalf(%);
```

$$-1$$
$$-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$-0.3090169938$$

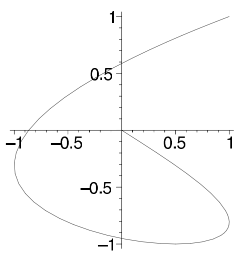
```
> x(2*Pi);y(2*Pi);evalf(%);
```

$$1$$
$$-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$-0.8090169943$$

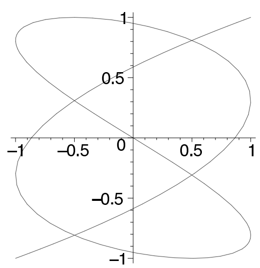
```
> x(5*Pi/2);y(5*Pi/2);
```

$$0$$
$$0$$

```
> plot([x(t),y(t),t=0..5*Pi/2]);
```




```
> plot([x(t),y(t),t=0..5*Pi]);
```



Points doubles

```
> S:=solve({x(u)=x(v),y(u)=y(v)},{u,v});
```

$$S := \{u=u, v=u\}, \{u = 5\arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3-4\_Z^2-4\_Z+1, label=\_L1)\right), v = 5\arccos\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3-4\_Z^2-4\_Z+1, label=\_L1)^3 - 2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3-4\_Z^2-4\_Z+1, label=\_L1)\right)\}, \{$$
$$u = 5\arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3-4\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L2)\right), v = 5\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3-4\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L2)^3 - 2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3-4\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L2)\right)\}$$

On élimine la première solution, qui correspond à $u = v$.

```
> T:=S[2..nops([S])];
```

$$T := \{u = 5\arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3-4\_Z^2-4\_Z+1, label=\_L1)\right), v = 5\arccos\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3-4\_Z^2-4\_Z+1, label=\_L1)^3 - 2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3-4\_Z^2-4\_Z+1, label=\_L1)\right)\}, \{$$
$$u = 5\arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3-4\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L2)\right), v = 5\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3-4\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L2)^3 - 2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3-4\_Z^2+4\_Z+1, label=\_L2)\right)\}$$

Coordonnées (en valeurs approchées) des points doubles :

```
> for i from 1 to nops([T]) do
  evalf( subs(evalf(T[i]),[x(u),y(u)]) );
  od;
```

$$[0.4999999986, -0.3090169934]$$
$$[-0.5000000007, -0.8090169939]$$

Maple en donne deux. On trouve les deux autres par symétrie centrale.
Remarque : un calcul à la main vous donne les coordonnées exactes de ces points doubles.

5)

```
> restart;
> x:=t->t^2+2/t:
  y:=t->t+1/t:
```

Domaine d'étude :]$-\infty$,0] U]0,$+\infty$[.
Limites :

```
> limit(x(t),t=-infinity);
  limit(y(t),t=-infinity);
```

$$\infty$$
$$-\infty$$

```
> limit(x(t),t=infinity);
  limit(y(t),t=infinity);
```

$$\infty$$
$$\infty$$

```
> limit(x(t),t=0);
  limit(y(t),t=0);
```

$$undefined$$
$$undefined$$

```
> limit(x(t),t=0,left);limit(x(t),t=0,right);
  limit(y(t),t=0,left);limit(x(t),t=0,right);
```

$$-\infty$$
$$\infty$$
$$-\infty$$
$$\infty$$

Branches infinies en $-\infty$ et $+\infty$

```
> limit(y(t)/x(t),t=-infinity);
  limit(y(t)/x(t),t=infinity);
```

$$0$$
$$0$$

Branche parabolique de direction asymptotique Ox quand t->$-\infty$ et t->$+\infty$. On peut obtenir un résultat plus précis en faisant des développements généralisés :

```
> taylor(x(t),t=-infinity);
  taylor(y(t),t=-infinity);
```

$$t^2+\frac{2}{t}$$
$$t+\frac{1}{t}$$

```
> taylor(x(t)-y(t)^2+2,t=-infinity);
  taylor(x(t)-y(t)^2+2,t=infinity);
```

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}$$

Ceci montre que la parabole d'équation $x=y^2-2$ est asymptote à la courbe quand t-> $+\infty$ et t->$-\infty$.

Branche infinie en 0

```
> limit(y(t)/x(t),t=0);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> limit(y(t)-1/2*x(t),t=0);
```

$$0$$

Donc la droite d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe quand t->1.

Variations

```
> xx:=D(x);yy:=D(y);
```

$$xx := t \to 2\,t-\frac{2}{t^2}$$
$$yy := t \to 1-\frac{1}{t^2}$$

```
> solve(xx(t)>0,t);
  solve(yy(t)>0,t);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1),\infty)$$
$$\mathrm{RealRange}(-\infty,\mathrm{Open}(-1)),\ \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1),\infty)$$

```
> solve(xx(t)=0,t);
  solve(yy(t)=0,t);
```

$$1,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}$$
$$1,-1$$

```
> x(1);y(1);
```

$$3$$
$$2$$

Point singulier : (3,2)

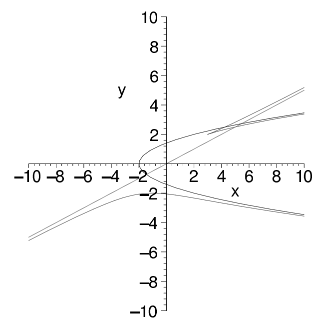
```
> taylor(x(t)-x(1),t=1);
  taylor(y(t)-y(1),t=1);
```

$$3\,(t-1)^2-2\,(t-1)^3+2\,(t-1)^4-2\,(t-1)^5+\mathrm{O}((t-1)^6)$$
$$(t-1)^2-(t-1)^3+(t-1)^4-(t-1)^5+\mathrm{O}((t-1)^6)$$

Donc c'est un point de rebroussement (de deuxième espèce).

Tracé : pour tracer la parabole définie par $x=y^2-2$, on utilise la commande *implicitplot* de la librairie *plots*, en fixant *numpoints* à 3000 pour avoir un dessin "lisse".

```
> with(plots):
  A:=implicitplot(x=y^2-2,x=-10..10,y=-10..10,color=blue,numpoint
  s=3000,color=blue):
  B:=plot(x/2,x=-10..10,y=-10..10,color=green):
  C:=plot([x(t),y(t),t=-100..100],-10..10,-10..10,numpoints=3000,
  color=red):
  display(A,B,C);
```



6)

```
> restart;
  x:=t->2*t+t^2:
  y:=t->2*t-1/t^2:
```

Domaine de définition :] $-\infty$,0]U]0,$+\infty$[

Limites :

```
> limit(x(t),t=-infinity);
  limit(y(t),t=-infinity);
```

$$\infty$$
$$-\infty$$

```
> limit(x(t),t=infinity);
  limit(y(t),t=infinity);
```

$$\infty$$
$$\infty$$

```
> limit(x(t),t=0);
  limit(y(t),t=0);
```

$$0$$
$$-\infty$$

Donc la courbe a une asymptote verticale d'équation $x=0$ quand t->0.

Branche infinie en +∞ et en -∞

```
> limit(y(t)/x(t),t=infinity);
  limit(y(t)/x(t),t=-infinity);
```

$$0$$
$$0$$

Donc branche parabolique de direction asymptotique Ox. Plus précisément :

```
> taylor(x(t),t=infinity);
  taylor(y(t),t=infinity);
```

$$2\,t+t^2$$
$$2\,t-\frac{1}{t^2}$$

```
> taylor(x(t)-y(t)-y(t)^2/4,t=infinity);
  taylor(x(t)-y(t)-y(t)^2/4,t=-infinity);
```

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4\,t^4}$$
$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4\,t^4}$$

Ceci montre que la parabole d'équation $x=y+\frac{y^2}{4}$ est asymptote.

Variations :

```
> xx:=D(x);
  yy:=D(y);
```

$$xx := t \to 2+2\,t$$
$$yy := t \to 2+\frac{2}{t^3}$$

```
> solve(xx(t)>0,t);
  solve(yy(t)>0,t);
```

RealRange(Open(-1), ∞)

RealRange(−∞, Open(-1)), RealRange(Open(0), ∞)

```
> solve(xx(t)=0,t);
  solve(yy(t)=0,t);
```

$$-1$$
$$-1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

Point singulier :

```
> x(-1);y(-1);
```

$$-1$$
$$-3$$

```
> taylor(x(t)-x(-1),t=-1);
  taylor(y(t)-y(-1),t=-1);
```

$$(t+1)^2$$
$$-3\,(t+1)^2-4\,(t+1)^3-5\,(t+1)^4-6\,(t+1)^5+\mathrm{O}((t+1)^6)$$

C'est un point de rebroussement (de première espèce).

Point double :

```
> solve({x(u)=x(v),y(u)=y(v),u<>v},{u,v});
```

$$\{u=-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2\,\_Z-1, label=\_L1)-2,\ v=\mathrm{RootOf}(\_Z^2+2\,\_Z-1, label=\_L1)\}$$

```
> S:=allvalues(%);
```

$$S := \{u=-1-\sqrt{2},\ v=\sqrt{2}-1\},\ \{u=\sqrt{2}-1,\ v=-1-\sqrt{2}\}$$

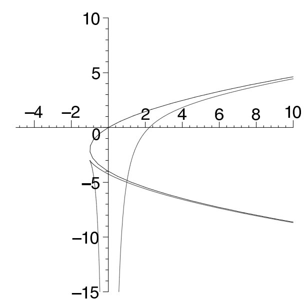
```
> subs(S[1],[x(u),y(u)]);
  map(simplify,%);
```

$$\left[-2-2\sqrt{2}+(-1-\sqrt{2})^2,\ -2-2\sqrt{2}-\frac{1}{(-1-\sqrt{2})^2}\right]$$
$$[1, -5]$$

Le point double a pour coordonnées (-1,5).

Tracé : pour tracer la parabole, on utilise à nouveau *implicitplot.*

```
> with(plots):
> A:=plot([x(t),y(t),t=-10..10],-5..10,-15..10,numpoints=2000,col
  or=red):
  B:=implicitplot(x=y+y^2/4,x=-5..10,y=-15..10,numpoints=2000,col
  or=blue):
> display(A,B);
```

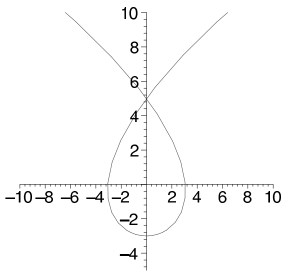


Exercice 2

```
> restart;
> x:=t->t^3-4*t;
  y:=t->2*t^2-3;
```

$$x := t \to t^3-4\,t$$
$$y := t \to 2\,t^2-3$$

```
> plot([x(t),y(t),t=-5..5],-10..10,-5..10);
```



Point double :

```
> solve({x(u)=x(v),y(u)=y(v),u<>v});
```

$$\{v=2, u=-2\}, \{v=-2, u=2\}$$

Les valeurs $t=2$ et $t=-2$ du paramètre donnent le meme point M(t)=(x(t),y(t)). Calculons ses coordoonnées :

Coordonnées du point double P :

```
> x(-2);y(-2);
  x(2);y(2);
```

$$0$$
$$5$$
$$0$$
$$5$$

Vecteur directeur de la première tangente en P :

```
> xx:=D(x);yy:=D(y);
```

$$xx := t \to 3\,t^2 - 4$$
$$yy := t \to 4\,t$$

```
> xx(-2);yy(2);
```

$$8$$
$$8$$

Vecteur directeur de la deuxième tangente en P :

```
> xx(2);yy(-2);
```

$$8$$
$$-8$$

Les vecteurs sont orthogonaux donc l'angle cherché est $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3

```
> restart;
  x:=t->t^2:
  y:=t->t^3:
> xx:=D(x);yy:=D(y);
```

$$xx := t \to 2\,t$$
$$yy := t \to 3\,t^2$$

Le vecteur tangent à la courbe au point M(t)=(x(t),y(t)) a pour coordonnées : (x'(t),y'(t)).
Equation de la tangente à la courbe en M(t) : (x-x(t)) y'(t) - (y-y(t)) x'(t) = 0.

```
> tangente:=(x-x(t))*yy(t)-(y-y(t))*xx(t)=0;
```

$$tangente := 3\,(x-t^2)\,t^2 - 2\,(y-t^3)\,t = 0$$

Soit P=(x,y) un point du plan, étant sur la tangente en M(u) et la tangente en M(v), et tel que les tangentes soient orthogonales. Les deux premières conditions se traduisent par :

```
> subs(t=u,tangente);
```

$$3\,(x-u^2)\,u^2 - 2\,(y-u^3)\,u = 0$$

```
> subs(t=v,tangente);
```

$$3\,(x-v^2)\,v^2 - 2\,(y-v^3)\,v = 0$$

La troisième par :

```
> xx(u)*xx(v)+yy(u)*yy(v)=0;
```

$$4\,u\,v + 9\,u^2\,v^2 = 0$$

On résoud le système :

```
> solve({subs(t=u,tangente),subs(t=v,tangente),xx(u)*xx(v)+yy(u)*
  yy(v)=0,u<>v});
```

$$\{u=u, v=0, y=\frac{3}{2}\,u\,x-\frac{1}{2}\,u^3, x=x\}, \{v=v, u=0, y=\frac{3}{2}\,v\,x-\frac{1}{2}\,v^3, x=x\},$$
$$\{v=v, y=-\frac{2\,(9\,v^2-4)}{81\,v}, u=-\frac{4}{9\,v}, x=\frac{81\,v^4-36\,v^2+16}{243\,v^2}\}$$

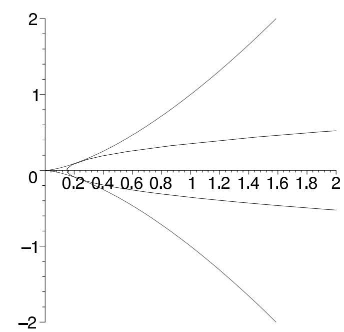
Gardons les solutions avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$ (le point (0,0) est singulier et il n'y a pas de droite tangente en ce point).

```
> S:=%[3];
```

$$S := \{v=v, y=-\frac{2\,(9\,v^2-4)}{81\,v}, u=-\frac{4}{9\,v}, x=\frac{81\,v^4-36\,v^2+16}{243\,v^2}\}$$

On obtient une courbe paramétrée x(v), y(v) que l'on peut tracer :

```
> with(plots):
  A:=plot([x(t),y(t),t=-10..10],0..2,-2..2,color=red,numpoints=10
  00):
  B:=plot([1/243*(81*v^4-36*v^2+16)/v^2,-2/81*(9*v^2-4)/v,v=0..5]
  ,color=blue):
  display(A,B);
```



Un calcul à la main montre que cette courbe est en fait une parabole.

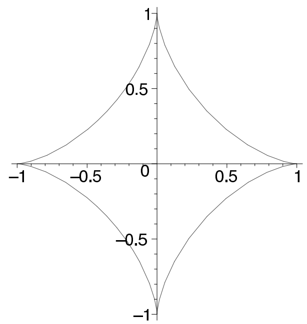
Exercice 4

```
> restart;
  x:=t->a*cos(t)^3;
  y:=t->a*sin(t)^3;
```

$$x := t \to a\cos(t)^3$$
$$y := t \to a\sin(t)^3$$

Sa période est $2\,\pi$.

```
> plot( subs(a=1,[x(t),y(t),t=0..2*Pi]) );
```



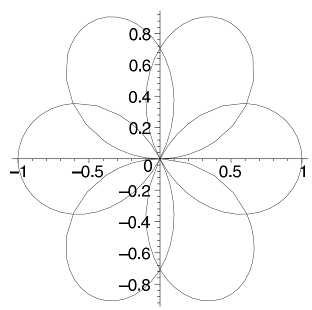

```
> with(plots):
> ?plots[animate]
> animate( plot, [[x(t),y(t),t=0..2*Pi]], a=-10..10 ) :
```

Exercice 5

```
> restart;
```

1) $\sin\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)$ est de période $\frac{4\,\pi}{3}$ et $(\cos(\theta),\sin(\theta))$ est de période $2\,\pi$. Donc la période minimale de la courbe est $4\,\pi$.

```
> plot([sin(3*t/2),t,t=0..4*Pi],coords=polar);
```



2) Soit $x(\theta)=\sin\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)\cos(\theta)$ et $y(\theta)=\sin\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)\sin(\theta)$.

$x(-\theta)=-x(\theta)$ et $y(-\theta)=y(\theta)$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy.

$x(\theta+2\,\pi)=-x(\theta)$ et $y(\theta+2\,\pi)=-y(\theta)$ donc la courbe est symétrique pa rapport à O

On en déduit qu'il suffit d'étudier la courbe pour θ dans l'intervalle $[0,\pi]$ et de compléter par symétries.

```
> plot([sin(3*t/2),t,t=0..Pi],coords=polar);
```