Correction du TP n°8

Exercice 1

```
> restart;with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Après chaque *restart*, n'oubliez pas de faire un *with(linalg)* si vous souhaitez faire de l'algèbre linéaire !

```
> u:=randvector(3); v:=randvector(3); w:=crossprod(u,v);
  dotprod(u,w); dotprod(v,w);
```

$$u := [79, 56, 49]$$
$$v := [63, 57, -59]$$
$$w := [-6097, 7748, 975]$$
$$0$$
$$0$$

On remarque que w est orthogonal à u et v. C'est une propriété du produit vectoriel.

Exercice 2

```
> u:=vector([2,1]); v:=vector([2*sqrt(3)-1,sqrt(3)+2]);
```

$$u := [2, 1]$$
$$v := [2\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+2]$$

On rappelle la propriété du produit scalaire : (u,v)=||u|| ||v|| cos(u,v). Dans Maple, la norme d'un vecteur s'obtient par la commande *norm(, 2)* de la librairie *linalg*. On peut aussi faire le calcul à la main.

```
> dotprod(u,v)/(norm(u,2)*norm(v,2));
```

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2}}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
> arccos(%);
```

$$\frac{\pi}{6}$$

Donc l'angle est $\frac{\pi}{6}$. Autre méthode : utiliser la commande *angle* de *linalg* qui calcule l'angle entre deux vecteurs par la même méthode que précédemment.

```
> ?linalg[angle]
> angle(u,v);
```

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2}}\right)$$

Bien entendu, Maple n'a pas simplifié l'expression, et il faut le lui demander expressément.

Exercice 3

```
> A:=randmatrix(4,4): B:=randmatrix(4,4):
> evalm(matadd(A,B)-matadd(B,A));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc A+B=B+A.

```
> evalm(inverse(A&*B)-inverse(B)&*inverse(A));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $AB^{(-1)} = B^{(-1)} A^{(-1)}$.

On calcule AB-BA par :

```
> matadd(multiply(A,B),-multiply(B,A));
```

$$\begin{bmatrix} -6683 & -13056 & -436 & -7078 \\ -25659 & -4688 & 7745 & -3096 \\ -8567 & -20601 & 5330 & -11399 \\ -2121 & 500 & -2714 & 6041 \end{bmatrix}$$

ou bien par :

```
> evalm(A&*B-B&*A);
```

$$\begin{bmatrix} -6683 & -13056 & -436 & -7078 \\ -25659 & -4688 & 7745 & -3096 \\ -8567 & -20601 & 5330 & -11399 \\ -2121 & 500 & -2714 & 6041 \end{bmatrix}$$

donc ici, $A\,B \neq B\,A$.

Exercice 4

```
> u:=vector([1,0]): v:=vector([3,5,2]): matadd(u,v);
Error, (in matadd) vector dimensions incompatible
```

On ne peut pas faire $u+v$ car u et v n'ont pas la même taille.

```
> A:=randmatrix(2,2): B:=randmatrix(3,3): matadd(A,B);
Error, (in matadd) matrix dimensions incompatible
```

On ne peut pas faire $A+B$ car A et B n'ont pas la même taille.

```
> multiply(A,v);
Error, (in multiply) non matching dimensions for vector/matrix product
```

On ne peut pas faire $A\,.\,v$ car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de v.

```
> C:=matrix([[1,2,3],[4,5,6]]); multiply(C,B); multiply(B,C);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in multiply) expecting a matrix or a vector
Error, (in multiply) expecting a matrix or a vector
```

On peut faire $C\,.\,B$ car le nombre de colonnes de C est égal au nombre de lignes de B. On ne peut pas faire $B\,.\,C$ car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de C.

<u>Exercice 5</u>

Une façon de faire :

```
> ajoute:=proc(M)
  local n,N,k;
  n:=rowdim(M);
  for k from 1 to n do
      M[k,1]:=M[k,1]+1;
  od;
  RETURN(evalm(M));
  end:
> ajoute(C);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Attention à bien mettre *evalm* dans le *RETURN*, sinon la procédure n'affiche pas le contenu de la matrice, mais seulement la lettre *M*.

<u>Exercice 6</u>

```
> M:=matrix(4,4,[0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(M);
```

$$-1$$

```
> evalm(M^5);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $M^5 = M$. La matrice est inversible car son déterminant est non nul. En multipliant l'égalité précédente par $M^{(-1)}$, on en déduit $M^4 = M^{(-1)} M = I$. En multipliant à nouveau par $M^{(-1)}$, on en déduit $M^3 = M^{(-1)}$. On vérifie les calculs à l'aide de Maple :

```
> evalm(M^4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(M^3-inverse(M));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M^{125} = M^{(5.5\,.\,5)} = M^{5.5} = M^5 = M$ (en utilisant $M^5 = M$). On le vérifie :

```
> evalm(M^125-M);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 7</u>

1) La famille de vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ est libre si la seule solution de $\lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_n\, x_n = 0$ (où les λ sont des réels) est $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Première famille : cela revient à voir les solutions du système :

$$\begin{cases} 3\,x + 5\,y = 0 \\ 4\,x + y = 0 \\ -2\,x + 7\,y = 0 \end{cases}$$

```
> solve({3*x+5*y=0,4*x+y=0,-2*x+7*y=0},{x,y});
```

$$\{y = 0, x = 0\}$$

Donc la famille est libre.

Deuxième famille :

$$\begin{cases} x + 2\,y + 8\,z = 0 \\ -x - 2\,z = 0 \\ 5\,y + 15\,z = 0 \end{cases}$$

```
> solve({x+2*y+8*z=0,-x-2*z=0,5*y+15*z=0},{x,y,z});
```

$$\{x = -2\,z, y = -3\,z, z = z\}$$

Donc la famille n'est pas libre.

2) La famille de vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ est génératrice de R^3 si : pour tout vecteur $x \in R^3$ il existe des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $x = \lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_n\, x_n$.

Première famille : soit X le vecteur (x,y,z). Cela revient à voir les solutions du système (d'inconnues $l1,l2,l3$)

$$\begin{cases} l1 + l2 = x \\ -l1 + l3 = y \\ l3 = z \end{cases}$$

```
> solve({l1+l2=x,-l1+l3=y,l3=z},{l1,l2,l3});
```

$$\{l3 = z, l1 = z - y, l2 = -z + y + x\}$$

Donc la famille est génératrice.

Deuxième famille : soit X le vecteur (x,y,z). Cela revient à voir les solutions du système (d'inconnues $l1,l2,l3,l4$)

$$\begin{cases} 2\,l1 + l2 + l3 + 4\,l4 = x \\ 4\,l1 + 3\,l2 + l3 + 5\,l4 = y \\ 6\,l1 + 5\,l2 + l3 + 7\,l4 = z \end{cases}$$

```
> solve({2*l1+l2+l3+4*l4 = x, 4*l1+3*l2+l3+5*l4 =
  y,6*l1+5*l2+l3+7*l4 = z},{l1,l2,l3,l4});
```

$$\{l4 = x + z - 2\,y,\ l1 = \frac{13\,y}{2} - l3 - 2\,x - \frac{7\,z}{2},\ l2 = -5\,y + l3 + x + 3\,z,\ l3 = l3\}$$

Le coefficient $l3$ n'est pas déterminé de façon unique. Mais en prenant n'importe quelle valeur pour $l3$, cela donne $l1$,$l2$ et $l4$. Donc la famille est génératrice.
Troisième famille : Soit X le vecteur (x,y,z). Cela revient à voir les solutions du système (d'inconnues $l1,l2,l3$)

$$\begin{cases} l1 + l2 = x \\ -l1 - l3 = y \\ 0 = z \end{cases}$$

```
> solve({l1+l2=x,-l1-l3=y,0=z},{l1,l2,l3});
```

Pas de solution, donc la famille n'est pas génératrice.

Exercice 8

On utilise la commande *basis* (voir document de cours).

```
> u:=vector([1,-1,0]);v:=vector([1,0,0]);w:=vector([0,1,1]);basis
  ({u,v,w});
```

$$u := [1, -1, 0]$$
$$v := [1, 0, 0]$$
$$w := [0, 1, 1]$$
$$\{u, v, w\}$$

```
> u:=vector([2,4,6]);v:=vector([1,3,5]);w:=vector([1,1,1]);z:=vec
  tor([4,5,7]);basis({u,v,w,z});
```

$$u := [2, 4, 6]$$
$$v := [1, 3, 5]$$
$$w := [1, 1, 1]$$
$$z := [4, 5, 7]$$
$$\{u, v, z\}$$

```
> u:=vector([1,-1,0]);v:=vector([1,0,0]);w:=vector([0,-1,0]);basi
  s({u,v,w});
```

$$u := [1, -1, 0]$$
$$v := [1, 0, 0]$$
$$w := [0, -1, 0]$$
$$\{u, v\}$$

Exercice 9

```
> u1:=vector([2,4,5,6]);u2:=vector([1,2,5,3]);u3:=vector([3,1,-1,
  0]);u4:=vector([4, 3, 4, 3]);
```

$$u1 := [2, 4, 5, 6]$$
$$u2 := [1, 2, 5, 3]$$
$$u3 := [3, 1, -1, 0]$$
$$u4 := [4, 3, 4, 3]$$

```
> basis({u1,u2,u3,u4});
```

$$\{u1, u4, u2\}$$

```
> w:=vector([4,3,-1,3]);
```

$$w := [4, 3, -1, 3]$$

On voit si w s'écrit comme combinaison linéaire de la forme $x\,u_1 + y\,u_2 + z\,u_4$ en résolvant le système (d'inconnues x, y, z) :

$$\begin{cases} 2\,x + y + 4\,z = 4 \\ 4\,x + 2\,y + 3\,z = 3 \\ 5\,x + 5\,y + 4\,z = -1 \\ 6\,x + 3\,y + 3\,z = 3 \end{cases}$$

```
> solve({2*x+y+4*z = 4,4*x+2*y+3*z = 3,5*x+5*y+4*z =
  -1,6*x+3*y+3*z = 3},{x,y,z});
```

$$\{z = 1, x = 1, y = -2\}$$

Donc $w = u_1 - 2\,u_2 + u_4$.

Exercice 10

Premier système :

```
> A:=matrix(3,3,[3,2,-1,2,-3,4,1,1,-3]);B:=vector([1,3,2]);
  v:=linsolve(A,B);
```

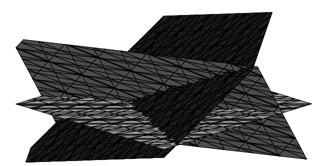
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$
$$B := [1, 3, 2]$$
$$v := \left[1, \frac{-7}{5}, \frac{-4}{5}\right]$$

Le système a une unique solution : $\left[1, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right]$.

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> ?plots[implicitplot3d]
> eq:=3*x+2*y-z=1,2*x-3*y+4*z=3,x+y-3*z=2;
  implicitplot3d([eq],x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,color=[red,blue,gre
  en]);
```

$$eq := 3\,x + 2\,y - z = 1,\ 2\,x - 3\,y + 4\,z = 3,\ x + y - 3\,z = 2$$



On voit que les trois plans se coupent en un unique point.

Deuxième système :

```
> A:=matrix(3,3,[3,2,1,2,-3,5,1,1,0]); B:=vector([1,-8,1]);
  linsolve(A,B);
```

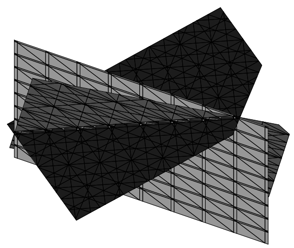
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B := [1, -8, 1]$$

$$[\_t_1, -\_t_1+1, -\_t_1-1]$$

Il y a une famille de solutions : les vecteurs $(t, -t+1, -t-1)$ pour t dans R.

```
> eq:=3*x+2*y+z=1,2*x-3*y+5*z=-8,x+y=1;
  implicitplot3d([eq],x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,color=[red,blue,gre
  en]);
```

$$eq := 3\,x+2\,y+z=1,\ 2\,x-3\,y+5\,z=-8,\ x+y=1$$



On voit que les trois plans se coupent en une droite.

Troisième système :

```
> A:=matrix(3,3,[1,1,1,2,2,2,-1,-1,-1]); B:=vector([0,0,0]);
  linsolve(A,B);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

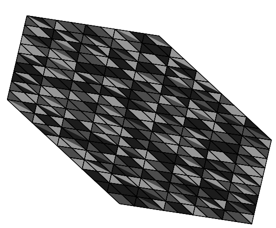
$$B := [0, 0, 0]$$

$$[-\_t_1-\_t_2, \_t_1, \_t_2]$$

Il y a une famille de solutions : les vecteurs $(-t-u, t, u)$ pour t et u dans R. L'espace des solutions est un plan de R^3.

```
> eq:=x+y+z=0,2*x+2*y+2*z,-x-y-z=0;
  implicitplot3d([eq],x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,color=[red,blue,gre
  en]);
```

$$eq := x+y+z=0,\ 2\,x+2\,y+2\,z,\ -x-y-z=0$$



Les trois plans sont confondus. L'ensemble des solutions est ce plan, d'équation est : $x+y+z=0$.

Quatrième système :

```
> A:=matrix(3,3,[2,-5,4,1,-2,1,1,-4,5]); B:=vector([-3,5,10]);
  linsolve(A,B);
```

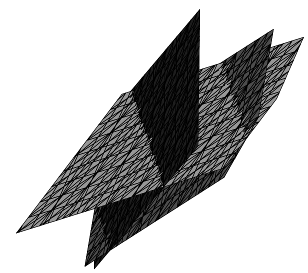
$$A := \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B := [-3, 5, 10]$$

L'ensemble des solutions est vide.

```
> eq:=2*x-5*y+4*z=-3,x-2*y+z=5,x-4*y+5*z=10;
  implicitplot3d([eq],x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,color=[red,bl
  ue,green]);
```

$$eq := 2\,x-5\,y+4\,z=-3,\ x-2\,y+z=5,\ x-4\,y+5\,z=10$$



Les plans ne s'intersectent pas, il n'y a pas de solution.

Exercice 11

```
> A:=matrix(3,3,[1,1,m,1,1,-1,1,m,-1]); B:=vector([m,1,1]);
  C:=augment(A,B);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := [m, 1, 1]$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m \\ 0 & m-1 & -1-m & 1-m \\ 0 & 0 & -1-m & 1-m \end{bmatrix}$$

Si $m=-1$, alors la dernière équation donne $0\,z=2$, donc le système n'a pas de solution.
Si $m=1$, le système est équivalent à $x+y+z=1$, $-2\,z=0$, $-2\,z=0$. Donc les solutions sont les (x, $-x$, 0) pour tout x dans R. C'est une droite de R^3, qui est contenue dans le plan $x+y+z=1$.

Si $m\neq -1$ et $m\neq 1$, alors la dernière équation donne $z=\frac{m-1}{m+1}$. Puis en reportant :

```
> subs(z=(m-1)/(m+1),  (m-1)*y+(-1-m)*z=1-m);
```

$$(m-1)\,y+\frac{(-1-m)\,(m-1)}{m+1}=1-m$$

```
> solve(%,y);
```

$$0$$

Donc $y=0$. Et enfin :

```
> subs(z=(m-1)/(m+1),y=0,x+y+m*z=m);
```

$$x+\frac{m\,(m-1)}{m+1}=m$$

```
> solve(%,x);
```

$$\frac{2\,m}{m+1}$$

Donc $x=\frac{2\,m}{m+1}$. Pour $m\neq -1$ et $m\neq 1$, la solution est $\left[\frac{2\,m}{1+m}, 0, \frac{-1+m}{1+m}\right]$.

Résolution par *linsolve* :

```
> linsolve(A,B);
```

$$\left[\frac{2\,m}{m+1}, 0, \frac{m-1}{m+1}\right]$$

Attention, si $m=-1$, le résultat donné par Maple n'a pas de sens !!! De plus, on ne peut pas distinguer sur la solution de Maple le cas particulier $m=1$ qui conduit à une infinité de solutions.
Conclusion : faire très attention quand on utilise *linsolve* pour résoudre un système linéaire à paramètre.

Exercice 12

```
> A:=matrix(3,3,[3,2,-1,2,-3,4,1,1,-3]);
  kernel(A); # base du noyau
  n:=nops(%); # dimension du noyau
  colspace(A); # base de l'image
  m:=nops(%); # dimension de l'image
  m+n; # somme des deux dimensions
```

$$A:=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\{\ \}$$

$$n:=0$$

$$\{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$$

$$m:=3$$

$$3$$

(le noyau est {0})

```
> B:=matrix(3,3,[3,2,1,2,-3,5,1,1,0]);
  kernel(B); n:=nops(%);
  colspace(B); m:=nops(%);
  m+n;
```

$$B:=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\{[-1, 1, 1]\}$$

$$n:=1$$

$$\left\{\left[1, 0, \frac{5}{13}\right], \left[0, 1, \frac{-1}{13}\right]\right\}$$

$$m:=2$$

$$3$$

```
> C:=matrix(3,2,[1,1,2,2,4,5]);
  kernel(C); n:=nops(%);
  colspace(C); m:=nops(%);
  m+n;
```

$$C:=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$\{\ \}$$

$$n:=0$$

$$\{[0, 0, 1], [1, 2, 0]\}$$

$$m:=2$$

$$2$$

On constate que la somme des dimensions est égale au nombre de colonnes de la matrice. C'est le "théorème du rang", ou "théorème noyau-image".
Remarque : la dimension de l'image, aussi appelée rang, peut etre calculé par la commande *rank*.

Exercice 13

```
> M:=matrix(3,3,[2,-2,1,2,-3,2,-1,2,0]);
```

$$M:=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(M);
```

$$-3, 1, 1$$

Deux valeurs propres : -3 (valeur propre simple) et 1 (valeur propre double).

```
> V:=eigenvects(M);
```

$$V:=[1, 2, \{[2, 1, 0], [-1, 0, 1]\}], [-3, 1, \{[-1, -2, 1]\}]$$

```
> v1:=vector([2,1,0]); # vecteur propre pour 1
  v2:=vector([-1,0,1]); # vecteur propre pour 1
  v3:=vector([-1,-2,1]); # vecteur propre pour -3
```

$$v1:=[2, 1, 0]$$

$$v2:=[-1, 0, 1]$$

$$v3:=[-1, -2, 1]$$

```
> basis({v1,v2,v3});
```

$$\{v1, v2, v3\}$$

La famille v_1, v_2, v_3 est donc libre dans R^3, et comme elle est de cardinal 3 = dimension de R^3, c'est une base de R^3.

La matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base est formée de la manière suivante :

```
> P:=augment(v1,v2,v3);
```

$$P := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(chaque vecteur colonne est l'expression d'un vecteur dans la nouvelle base comme combinéaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base)

Alors $P^{(-1)} M P$ vaut :

```
> evalm(inverse(P)&*M&*P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

On obtient une matrice diagonale. C'est normal car, par définition des vecteurs propres, $M v_1 = v_1$, $M v_2 = v_2$ et $M v_3 = -3\ v_3$, ce qui donne la matrice de l'application linéaire dans la nouvelle base.