Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Premier semestre 2006/07
M1 Maths-info - Algèbre

Devoir à la maison n°1

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe aucun groupe simple d'ordre 56.

Exercice 2. Soit G un groupe cyclique d'ordre n.

1) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique.
2) Soit d divisant n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d. En déduire le nombre d'éléments de G qui sont d'ordre d.

Exercice 3. Soit X un ensemble fini et G un groupe fini agissant sur X. Montrer que le nombre d'orbites de X sous l'action de G est :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|N(g)|$$

où $N(g)=\{x\in X \mid gx=x\}$ est l'ensemble des éléments de X fixés par g. Pour cela, on pourra calculer de deux manières différentes le cardinal de l'ensemble :

$$C=\{(g,x)\in G\times X \mid gx=x\}.$$

Exercice 4.

On fabrique des colliers constitués de n perles de couleurs. La couleur de chaque perle est choisie parmi une palette de c couleurs (chaque couleur peut être choisie plusieurs fois). Le but de l'exercice est de calculer le nombre m de colliers que l'on peut fabriquer de cette façon, étant entendu qu'on identifie les colliers qui se correspondent par une rotation.

1) Soit X l'ensemble des colliers sans cette identification. On fait agir sur X le groupe G engendré par une rotation d'ordre n. En utilisant les exercices 2 et 3, montrer qu'on a :

$$m=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)c^{\frac{n}{d}}$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler.
Indication : Pour calculer $|N(g)|$ pour $g\in G$, on pourra faire agir le sous-groupe engendré par g sur l'ensemble des n emplacements des perles.

2) Maintenant on suppose qu'on identifie les colliers qui se correspondent par une rotation ou un retournement (symétrie axiale). Quel groupe faut-il faire agir sur X ? Montrer que m vaut :

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)c^{\frac{n}{d}}+nc^{\frac{n+1}{2}}\right) \qquad \text{si } n \text{ est impair ;}$$

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)c^{\frac{n}{d}}+\frac{n}{2}c^{\frac{n+2}{2}}+\frac{n}{2}c^{\frac{n}{2}}\right) \qquad \text{si } n \text{ est pair.}$$