Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Premier semestre 2006/07
M1 Maths-info - Algèbre

Feuille d'exercices n°1

Groupes

Exercice 1. Quel est le dernier chiffre de 2007^{2005} en écriture décimale ? En écriture diadique ? Triadique ?

Exercice 2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique et donner la liste de ses générateurs.

Exercice 3. Soit H et K deux sous-groupes de G. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G.

Exercice 4. **Groupe diédral.** Soit $n \geq 3$ un entier, r_n la rotation du plan de centre O et d'angle $2\pi/n$ et s la symétrie par rapport à l'axe Ox. Le sous-groupe des isométries du plan engendré par r_n et s est noté D_n et appelé le groupe diédral.

1. Calculer les ordres de s et r_n dans D_n. Démontrer la relation $rs = sr^{-1}$ pour toute rotation r dans D_n ;
2. Montrer que D_n est de cardinal $2n$ et calculer son centre ;
3. Montrer que D_n préserve un polygone régulier à n côtés centré en O ;
4. Construire un isomorphisme entre D_3 et le groupe symétrique S_3.

Exercice 5. Soit G un groupe.

1. Montrer que si $x \in G$ est d'ordre n alors, pour tout entier $m \geq 1$, x^m est d'ordre $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(m,n)}$;
2. Montrer que si $x \in G$ et $y \in G$ commutent, sont respectivement d'ordre m et n et si m et n sont premiers entre eux alors $x.y$ est d'ordre mn. Montrer que si on enlève une des hypothèses, cette propriété peut-être mise en défaut ;
3. Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Vérifier qu'ils sont d'ordre fini mais que SU est d'ordre infini.

Exercice 6. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines $n$èmes de l'unité est l'unique sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n. Déterminer les racines primitives $n$èmes de l'unité, c'est-à-dire les générateurs de $\mathbb{U}_n$. Combien sont-elles ?

Exercice 7. Montrer qu'un groupe fini G dont tous les éléments $g \neq e$ sont d'ordre 2 est commutatif. En raisonnant par récurrence, prouver que son ordre est une puissance de 2.

En déduire que tout groupe d'ordre 34 possède un élément d'ordre 17.

Exercice 8. Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 est toujours distingué.

Exercice 9. Soit G un groupe. On suppose que le quotient du groupe G par son centre Z est monogène. Montrer que G est abélien.

Exercice 10. **Groupes des quaternions.** Soit $\mathbb{H}$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer son ordre ;
2. Quel est son centre ?
3. Exhiber tous ses sous-groupes. Lesquels sont distingués ?
4. Quels sont ses quotients ?
5. Tous les automorphismes de $\mathbb{H}$ sont-ils intérieurs ?

Exercice 11. Les groupes suivants sont-ils isomorphes :

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$?
2. $\mathfrak{S}_3$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?
3. $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?
4. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ et le quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par son centre ?

Exercice 12. Soit G un groupe. Rappeler pourquoi, si $g \in G$, l'application $h \mapsto g.h.g^{-1}$ est un automorphisme de G. Un tel automorphisme est appelé automorphisme intérieur. Montrer que les automorphismes intérieurs de G forment un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ isomorphe au quotient de G par son centre.

Exercice 13. Un isomorphisme classique. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On suppose que K normalise H, c'est-à-dire $\forall k \in K$, $kH = Hk$.

1. Montrer que $HK := \{hk : (h,k) \in H \times K\}$ est un sous-groupe de G ;
2. Prouver que les groupes HK/H et $K/K \cap H$ sont isomorphes.

Exercice 14. Sous-groupes caractéristiques. On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est caractéristique si et seulement s'il est stable par tout automorphisme de G : $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi(H) = H$.

1. Montrer qu'on peut remplacer, dans cette définition, l'égalité par une inclusion : $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi(H) \subset H$;
2. Montrer que tout sous-groupe caractéristique est distingué ;
3. Montrer que le sous-groupe trivial et le centre d'un groupe sont toujours caractéristiques ;
4. Quels sont les sous-groupes caractéristiques du groupe des quaternions $\mathbb{H}$?
5. Montrer que, parmi les sous-groupes de G, la relation "... est un sous-groupe caractéristique de ..." est transitive ;
6. Est-ce vrai pour les sous-groupes distingués ?

Exercice 15. Sous-groupe dérivé. Le sous-groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[x, y] := x.y.x^{-1}.y^{-1}$.

1. Quel est le sous-groupe dérivé d'un groupe abélien ?
2. Quel est le sous-groupe dérivé du groupe des quaternions $\mathbb{H}$?
3. Montrer que le sous-groupe dérivé est caractéristique ;
4. Montrer que $G/D(G)$ est un groupe abélien ;
5. Montrer que $D(G) = \bigcap_\varphi \ker \varphi$ où $\varphi : G \to H$ parcourt les morphismes de G dans les groupes abéliens.