Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Premier semestre 2006/07
M1 Maths-info - Algèbre

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Actions de groupes, sous-groupes de Sylow

Exercice 1. Soit G un groupe. En considérant l'action de G sur lui-même par translation (à droite ou à gauche, comme on préfère), montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(G)$.

Exercice 2. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Décrire le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué. Décrire le plus grand sous-groupe de H distingué dans G.

Exercice 3. Soit G un p-groupe. Rappeler pourquoi son centre est non trivial. Montrer que si G est d'ordre p^2 alors G est abélien.

Exercice 4. Dénombrer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 5. Soient p et q deux nombres premiers distincts et tels que $p \not\equiv 1 \bmod q$ et $q \not\equiv 1 \bmod p$. En étudiant ses sous-groupes de Sylow, montrer que tout groupe d'ordre pq est isomorphe à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit p un nombre premier impair et G un groupe d'ordre $2p$. Le but de l'exercice est de montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_p. Pour celà, on suppose que G n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$. Dénombrer, pour tout $n \geq 1$, les éléments d'ordre n dans G. Si x et y sont des éléments de G d'ordre 2 et p respectivement, quel est l'ordre de xy ? Conclure.

Exercice 7. **Décomposition d'Iwasawa.** On note $\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On considère l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par homographies sur $\mathfrak{H}$ définie par :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \gamma.z := \frac{az+b}{cz+d}$$

Quel le stabilisateur de $i \in \mathfrak{H}$? Quelle est l'orbite de $i \in \mathfrak{H}$ sous le sous-groupe $\mathrm{B}(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$? En déduire la décomposition d'Iwasawa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{B}(\mathbb{R})\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. **Le groupe du cube.** Soit G le groupe des isométries de l'espace préservant le cube. Montrer que l'action de G sur les grandes diagonales du cube induit un morphisme $\alpha : G \to \mathfrak{S}_4$. Vérifier que chaque transposition de $\mathfrak{S}_4$ se relève en un élément de G. En déduire l'image de α. Montrer que le noyau de α ne contient que deux éléments. *Rappel : toute isométrie de l'espace est une rotation, éventuellement composée avec la symétrie centrale par rapport à l'origine.* Montrer qu'il existe un isomorphisme $G \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En utilisant l'action de G sur les axes joignant les centres des faces opposées du cube, déterminer les 2-Sylow de G. Comment peut-on visualiser les 3-Sylow de G ?

Exercice 9. Soit p un nombre premier et G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ qui agit transitivement sur $\{1, 2, \cdots, p\}$. Montrer que p divise l'ordre de G. En déduire que G contient un p-cycle. Montrer que si G contient une transposition, alors $G = \mathfrak{S}_p$.

Exercice 10. Soit p un nombre premier et $n \geq 2$ un entier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Un exemple de p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

   (a) Dénombrer les bases du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathbb{F}_p^n$;
   (b) En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ est d'ordre

$$\#\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$$

   (c) Montrer que les matrices unipotentes triangulaires supérieures forment un p-Sylow du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. On notera U^+ ce p-Sylow.

2. Dénombrement des p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Un drapeau $D = (D_i)_{i=0}^n$ de $\mathbb{F}_p^n$ est une suite

$$D_0 \subsetneq D_1 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n$$

   de $n+1$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{F}_p^n$ strictement ordonnée par inclusion.
   (a) Montrer que pour un tel drapeau, on a $\dim_{\mathbb{F}_p} D_i = i$;
   (b) Montrer que le nombre de drapeaux de $\mathbb{F}_p^n$ est égal à $\prod_{i=1}^n \frac{p^i-1}{p-1}$.
   (c) À tout drapeau D, on associe le sous-groupe U_D formé des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ qui induisent l'identité sur les espaces D_0, D_1/D_0, $\cdots$, D_n/D_{n-1}. Si on note $(e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{F}_p^n$, déterminer le sous-groupe associé au drapeau

$$0 \subsetneq \mathrm{Vect}\{e_1\} \subsetneq \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

   (d) On définit de plus une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ sur l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{F}_p^n$: si $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, $g(D)$ est le drapeau

$$g(D_0) \subsetneq g(D_1) \subsetneq \cdots \subsetneq g(D_n)$$

   Montrer que cette action est transitive.
   (e) Quel relation existe-t-il entre U_D et $U_{g(D)}$?
   (f) En déduire le normalisateur de U^+ et le nombre de p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.