Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Premier semestre 2006/07
M1 Maths-info - Algèbre

Feuille d'exercices n° 3

Groupes résolubles, groupes simples

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe aucun groupe simple d'ordre 28.

Exercice 2. Montrer que le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les carrés σ^2 ($\sigma \in \mathfrak{S}_n$) est distingué dans $\mathfrak{S}_n$. Déterminer ce sous-groupe.

Exercice 3. Soit G un groupe simple.

1) Montrer que tout morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ est trivial ou injectif.
2) On suppose que G agit non trivialement sur un ensemble fini X. En considérant le morphisme $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ défini par cette action, montrer que G est fini, de cardinal divisant $(\mathrm{Card}\ X)!$. Déterminer dans quels cas on a l'égalité $\mathrm{Card}\ G = (\mathrm{Card}\ X)!$.

Exercice 4. Quels sont les groupes simples abéliens ? Les groupes simples résolubles ? Le plus petit groupe résoluble non abélien ? Le plus petit groupe résoluble qui n'est pas un p-groupe ? Pour quelles valeurs de n le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est-il résoluble ?

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier et H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n. Montrer que H est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 6. Soit p un nombre premier. En utilisant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sur les droites de $\mathbb{F}_p^2$, montrer que les groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ sont résolubles mais que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ ne l'est pas. *Indication : dans ce dernier cas, on utilisera l'exercice précédent.*

Exercice 7. Soit G un groupe de cardinal $2n$ avec n impair.

1) Montrer que G contient un sous-groupe distingué d'indice 2, et en particulier G n'est pas simple. *Indication : l'action par translation induit un morphisme $\rho : G \to \mathfrak{S}_{2n}$; montrer que* $\mathrm{Ker}(\epsilon \circ \rho)$ *est d'indice* 2 *dans* G.
2) En admettant le théorème de Feit-Thomson (tout groupe de cardinal impair est résoluble), montrer que G est résoluble.

Exercice 8. Soit G un groupe simple d'ordre 60. En faisant agir G par conjugaison sur certains sous-groupes de Sylow, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.