Correction du contrôle n° 1

Exercice 1.

1) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}$, on obtient, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(1+x)-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

donc la limite quand x tend vers 0 est $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.

Remarque. Une autre méthode : calculez cette limite à l'aide des développements limités.

2) On souhaite se ramener à une limite du type $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$. Pour cela, on écrit

$$\frac{\ln(3x+1)}{2x} = \frac{\ln(3x+1)}{3x} \times \frac{3}{2}.$$

Ensuite, on effectue le changement de variable $y = 3x$. Quand x tend vers 0, y tend également vers 0. La limite cherchée est donc

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Remarque.

1) L'affirmation $\frac{\ln(3x+1)}{2x} = \frac{e^{\ln(3x+1)}}{e^{2x}}$, lue dans un certain nombre de copies, est FAUSSE. Pour vous en convaincre, prenez une valeur de $x > 0$ telle que $3x+1 < e$ (par exemple, $x = \frac{e-1}{4}$). Alors le membre de gauche est strictement négatif et celui de droite strictement positif.

   Il ne faut pas confondre les deux choses suivantes : dans une fraction, multiplier le numérateur et le dénominateur par un *nombre* non nul ne change pas la fraction :

   $$\frac{x}{y} = \frac{ax}{ay} \qquad \text{quelque soit } a \neq 0$$

   et : si f est une *fonction*,

   $$\text{si } x = y \text{ alors } f(x) = f(y).$$

2) Contrairement à ce qui a été vu dans un certain nombre de copies, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ ne vaut PAS 1 ni $+\infty$. Elle vaut $-\infty$ (cela se calcule directement, il n'y a pas de forme indéterminée).

3) Rappel des « formes indéterminées » pour les limites.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	
$+\infty$	$-\infty$	$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = ?$
0	$\pm\infty$	$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = ?$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$
0	0	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

   Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas : simplement, cela ne permet pas de conclure.

4) Une autre méthode : calculez la limite demandée à l'aide des développements limités.

3) On procède par encadrement. Pour tout $x \neq 0$, on a $-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$ donc $1 \leq 2+\sin(\frac{1}{x}) \leq 3$, ce qui donne

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\sin(\frac{1}{x})} \leq 1.$$

On multiplie ensuite ces inégalités par x, ce qui donne

$$\begin{array}{ll} \frac{x}{3} \leq \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} \leq x & \text{si } x > 0 \\ x \leq \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} \leq \frac{x}{3} & \text{si } x < 0 \end{array}$$

Le théorème d'encadrement donne alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} = 0 = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})} = 0$.

Exercice 2.

1) Pour montrer les inégalités, on peut faire une étude de fonctions.

Soit $a : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $x - \ln(1+x)$. Cette fonction est bien définie. Elle est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, de dérivée $a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Pour $x \geq 0$, $a'(x) \geq 0$ donc la fonction a est croissante. En particulier, $a(x) \geq a(0) = 0$. Cela montre $x \geq \ln(1+x)$ pour tout $x \geq 0$.

Soit $b : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie. Elle est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, de dérivée $b'(x) = \frac{x^2}{1+x}$. Pour $x \geq 0$, $b'(x) \geq 0$ donc la fonction b est croissante. En particulier, $b(x) \geq b(0) = 0$. Cela montre $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ pour tout $x \geq 0$.

2) Calculons la limite de $g(x)$ quand $x \to 1^+$. Pour cela, on pose $x = y+1$ (avec $y > 0$), de sorte que $1 + x - \frac{2x\ln(x)}{x-1} = 2 + y - \frac{2(y+1)\ln(1+y)}{y}$. Les inégalités de la question 1) donnent

$$2(y+1)(1-\frac{y}{2}) \leq \frac{2(y+1)}{y}\ln(y+1) \leq 2(y+1)$$

(car $y+1 \geq 0$ et $y > 0$) donc

$$-y \leq 2 + y - \frac{2(y+1)\ln(1+y)}{y} \leq y^2.$$

En passant à la limite quand $y \to 0^+$, on obtient $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{y\to 0^+} \left(2 + y - \frac{2(y+1)\ln(1+y)}{y}\right) = 0$. Comme cette limite est égale à $g(1) = 0$, la fonction g est continue en 1.

(la fonction g n'étant pas donnée par une « formule » à gauche de 1, pour montrer que g est continue en 1, il faut calculer sa limite à droite uniquement)

Remarque. Attention à bien distinguer continuité en un point et prolongement par continuité en un point :

- Si f est une fonction et *a est dans son domaine de définition*, f est continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Si f est une fonction et *a n'est pas dans son domaine de définition*, f est prolongeable par continuité en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et est finie. On peut alors prolonger f de façon continue en a en définisssant $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Exercice 3.

1) Le dénominateur $x^2 + x + 1$ de la fraction est un trinôme du second degré, de discriminant $-3 < 0$, donc il n'a pas de racines réelles. La fonction f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée est $f'(x) = \frac{(x^2+x+1)-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$.

Remarque. Les affirmations suivantes ont étés vues dans des copies et sont FAUSSES.

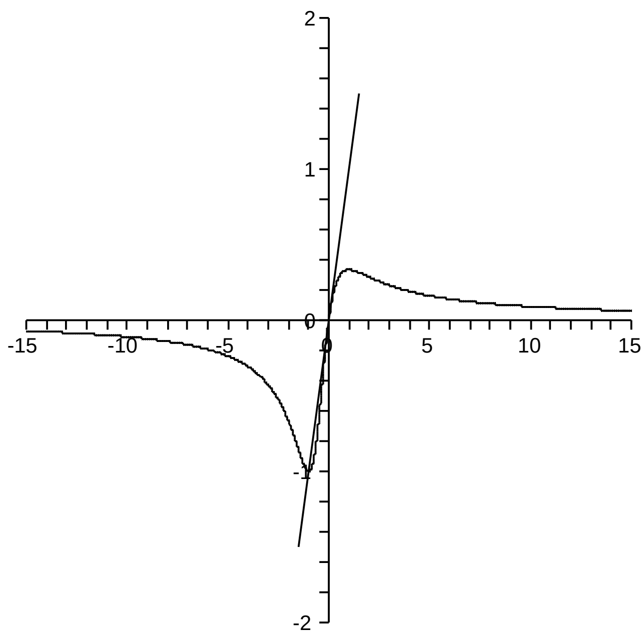
- « La fonction est définie donc continue » : contre-exemple, la fonction qui vaut 0 sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[0,+\infty[$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas continue en 0.
- « La fonction est définie donc dérivable » : même contre-exemple !
- « La fonction a des limites en $+\infty$ et $-\infty$ donc elle est continue » : même contre-exemple !

3) On écrit $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{x+1+\frac{1}{x}}$. Quand x tend vers $\pm\infty$, le dénominateur de cette expression tend vers $\pm\infty$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

La dérivée de f est du signe de $1 - x^2$, donc négative si $-1 \leq x \leq 1$ et positive ailleurs. Cela donne le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-1)=-1$	$\nearrow$	$f(1)=\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Pour tracer la courbe représentative de f, on calcule quelques données supplémentaires. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 0$, donc la courbe coupe l'axe des ordonnées en $x = 0$. On peut également calculer la tangente à la courbe en ce point. On a $f'(0) = 1$ donc cette tangente a pour équation $y = x$. Voici la courbe représentative (on a fait également figurer la tangente en $x = 0$).



4) Sur $]-1,1[$, f' est strictement positive et $f'(-1) = f'(1) = 0$. Donc f est *strictement croissante sur* $[-1,1]$. Comme elle est *continue* sur cet intervalle, par un résultat du cours, elle induit une bijection de $[-1,1]$ sur $f([-1,1]) = [f(-1), f(1)] = [-1, \frac{1}{3}]$.

Remarque. Les affirmations suivantes ont étés vues dans des copies et sont FAUSSES.

– « La fonction est une bijection, donc elle est continue et strictement monotone » : contre-exemple, la fonction qui vaut x si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2} - x$ si $\frac{1}{2} < x < 1$ (tracez-la pour comprendre). Elle est bijective de $[0,1[$ dans $[0,1[$. Pourtant, elle n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

– « La fonction est une bijection, donc elle est dérivable » : même contre-exemple !

5) Rappelons que, d'après la question précédente, le domaine de définition de f^{-1} est $[-1, \frac{1}{3}]$. D'après un théorème du cours (rappelé en TD), la réciproque $f^{-1}(y)$ est dérivable en les $y \in [-1, \frac{1}{3}]$ tels que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$; de plus, si y vérifie $f'(f^{-1}(y)) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y.

Résolvons l'équation $f'(f^{-1}(y)) = 0$. Comme la dérivée de f ne s'annule qu'en -1 et 1, cela correspond à $f^{-1}(y) = -1$ ou 1 c'est-à-dire $y = f(-1) = -1$ ou $y = f(1) = \frac{1}{3}$. Donc f est dérivable sur $]-1, \frac{1}{3}[$ et n'est pas dérivable en -1 ni en $\frac{1}{3}$.

6) On calcule $f^{-1}(-\frac{2}{3})$. L'équation $x = f^{-1}(-\frac{2}{3})$ équivaut, par composition avec f, à $f(x) = -\frac{2}{3}$. Cela revient à résoudre $2x^2 + 5x + 2 = 0$. On trouve les solutions -2 et $-\frac{1}{2}$. La seule solution dans $f^{-1}([-1, \frac{1}{3}]) = [-1,1]$ est $x = -\frac{1}{2}$. Donc $f^{-1}(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}$.

Il reste à calculer $(f^{-1})'(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-\frac{2}{3}))} = \frac{1}{f'(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$. La tangente à la courbe de f^{-1} en $-\frac{2}{3}$ a pour équation : $y = f^{-1}(-\frac{2}{3}) + (f^{-1})'(-\frac{2}{3})(x + \frac{2}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x + \frac{2}{3}) = \frac{3}{4}x$.