

Contrôle n° 1

Aucune calculatrice ni aucun document ne sont autorisés. Chaque résultat ou calcul devra être justifié.

Exercice 1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}$

Exercice 2. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 + x - \frac{2x \ln x}{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- 2) En déduire que g est continue en 1.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

- 1) Déterminer son ensemble de définition \mathcal{D}_f . Montrer que f est continue sur \mathcal{D}_f .
- 2) Montrer que f est dérivable sur \mathcal{D}_f et calculer sa dérivée.
- 3) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .
- 4) Montrer que f réalise une bijection de $[-1; 1]$ sur un intervalle $[a; b]$ que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
- 5) Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $]a; b[$. Est-elle dérivable en a ? en b ?
- 6) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} au point d'abscisse $-\frac{2}{3}$.