Correction du contrôle n° 2

Exercice 1. 1) *Théorème des accroissements finis.* Soient a et b réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2) Soit $x > 0$ quelconque. On applique le théorème à la fonction $y \mapsto \ln(y)$ sur l'intervalle $[x, x + 1]$. La fonction logarithme est continue sur $[x, x + 1]$, puisqu'elle est continue sur $]0, +\infty[$ et que $[x, x + 1] \subset]0, +\infty[$ du fait que $x > 0$. Comme ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, elle est dérivable sur $]x, x + 1[$. D'après le théorème, il existe $c_x \in]x, x + 1[$ tel que

$$\ln(x + 1) - \ln(x) = (x + 1 - x)\ln'(c_x) = \frac{1}{c_x}.$$

Comme $x < c_x < x + 1$, on en déduit $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x}$, d'où

$$\frac{1}{x + 1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

3) Soit $x > 0$. On multiplie les inégalités précédentes par x :

$$\frac{x}{x + 1} < x(\ln(x + 1) - \ln x) < 1$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. Comme le membre de droite de l'inégalité tend aussi vers 1, on applique le théorème des gendarmes et on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} (x(\ln(x + 1) - \ln x)) = 1.$$

4) Pour $x > 0$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = e^{x(\ln(x+1)-\ln x)}.$$

Comme la fonction exponentielle est continue en 1 et $\lim_{x\to+\infty}(x(\ln(x + 1) - \ln x)) = 1$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

Exercice 2. 1) Pour obtenir le développement limité de $\sin^2(x)$ à l'ordre 4 en 0, on commence par écrire celui de $\sin(x)$ à l'ordre 4 en 0.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$$

puis on effectue le produit de ce DL avec lui-même, en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 4.

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + x^4\varepsilon(x) = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + x^4\varepsilon(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Pour obtenir le développement limité de $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4 en 0, on commence par écrire celui de $\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$$

puis celui de $\ln(1+y)$ en 0 à l'ordre 4 :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + y^4\varepsilon(y)$$

On écrit ensuite $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1))$. Comme $\cos(x)-1$ vaut 0 en 0, on peut composer les DL de $\cos(x)-1$ et $\ln(1+y)$ en 0 :

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x)) &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4 + x^4\varepsilon(x)\\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

(on n'a gardé que les termes d'ordre ≤ 4).

2) *Remarque :* la limite demandée se présente sous forme indéterminée. En effet, on a d'une part,

$$\lim_{x\to 0} \sin^2(x) = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sin^2(x)} = +\infty$$

d'autre part,

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1^- \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \ln(\cos(x)) = 0^- \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(\cos(x))} = -\infty.$$

La forme indéterminée est de type "$+\infty - \infty$". On ne peut pas conclure directement. On va donc utiliser des développements limités.
D'après la question précédente, pour x au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))} &= \frac{2}{x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)} + \frac{1}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)}\\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{1 - \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)} + \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x)}\right).\end{aligned}$$

Calculons un développement limité d'ordre 2 du facteur entre parenthèses. On rappelle que $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^2\varepsilon(y)$ pour y au voisinage de 0. À l'ordre 2, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{1 - \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)} &= 2\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\\ \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x)} &= \frac{-2}{1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)} = -2\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\end{aligned}$$

donc le développement de la somme est $x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et

$$\frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))} = \frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = 1 + \varepsilon(x).$$

Comme $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, on en déduit

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))}\right) = 1.$$

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^5(x) + 3\sin(x)$.

1) *Rappel :* si u est une fonction dérivable et $a \in \mathbb{R}$ une constante, alors

$$[u(x)^a]' = au'(x)u(x)^{a-1}.$$

C'est un cas particulier de la règle de dérivation des fonctions composées (ici, c'est la composée des fonctions u et $x \mapsto x^a$).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). Sa dérivée est :

$$f'(x) = 5\cos(x)\sin^4(x) + 3\cos(x) = (5\sin^4(x) + 3)\cos(x).$$

Comme $4\sin^4(x) + 3 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$. Le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel le cosinus est positif est $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel f est croissante est $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) La fonction f est *strictement* croissante sur I car $f'(x) > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f' s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. De plus, f est continue sur I car elle y est dérivable. D'après le théorème de la bijection, la fonction f est une bijection de I sur $f(I) = f(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = [-4, 4] = J$.
Rappel : $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

3) Soit $g : J \to I$ l'application réciproque de f. D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, comme f est dérivable sur I, g est dérivable en tous les $y \in J$ tels que $f'(g(y)) \neq 0$. Mais $f'(g(y)) = 0$ si et seulement si $g(y) = \frac{\pi}{2}$ ou $g(y) = -\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $y = f(-\frac{\pi}{2})$ ou $y = f(\frac{\pi}{2})$, c'est-à-dire à $y = -4$ ou $y = 4$. Donc f est dérivable sur $]-4, 4[$.
En particulier, g est dérivable en 0, et d'après le théorème, on a $g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}$. Comme $f(0) = 0$, on a $0 = g(0)$ donc $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.

4) Le développement limité de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x).$$

On en déduit que le développement de $\sin^5(x)$ commence par x^5, donc

$$\sin^5(x) = x^3\varepsilon(x).$$

Ainsi, le développement de $\sin^5(x) + 3\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3 est

$$\sin^5(x) + 3\sin(x) = 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)\right) = 3x - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x).$$

5) *Existence du DL.* Pour montrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, il suffit de montrer que g est trois fois dérivable au voisinage de 0 d'après le théorème de Taylor-Young. On a déjà montré que g est dérivable sur $]-4, 4[$, intervalle ouvert qui contient 0. De plus, pour tout $-4 < y < 4$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Comme g est dérivable sur $]-4, 4[$ et f est dérivable sur $g(]-4, 4[) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(g(y))$ ne s'annule pas sur $]-4, 4[$, on en déduit que g' est dérivable sur $]-4, 4[$. De plus, en dérivant l'expression précédente, on obtient

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y))g'(y)}{(f'(g(y)))^2}$$

On sait que g et g' sont dérivables sur $]-4,4[$. De plus, f' et f'' sont dérivables sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (car la fonction f est indéfiniment dérivable, cela se voit directement sur son expression). Donc g'' est dérivable sur $]-4,4[$ ce qui signifie que g est trois fois dérivable sur $]-4,4[$.
Calcul du DL. D'après le théorème de Taylor-Young, le développement limité de g en 0 à l'ordre 3 est de la forme :

$$g(y) = g(0) + g'(0)y + ay^2 + by^3 + y^3\varepsilon(y)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $g(0) = 0$ et $g'(0) = \frac{1}{3}$, on a $g(y) = \frac{1}{3}y + ay^2 + by^3 + y^3\varepsilon(y)$.
Par définition de g, on a :

$$\text{pour tout } x \text{ dans } I \qquad g(f(x)) = x.$$

Calculons le développement limité de $g(f(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0, en utilisant les développements de f et g en 0 (on remarque que $f(0) = 0$ donc on a bien le droit de composer ces deux DL).

$$g(f(x)) = \frac{1}{3}\left(3x - \frac{x^3}{2}\right) + a\left(3x - \frac{x^3}{2}\right)^2 + b\left(3x - \frac{x^3}{2}\right)^3 + x^3\varepsilon(x)$$

En développant et en ne gardant que les termes d'ordre au plus 3, on a

$$g(f(x)) = x - \frac{x^3}{6} + 9ax^2 + 27bx^3 + x^3\varepsilon(x) = x + 9ax^2 + (27b - \frac{1}{6})x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Par ailleurs, le développement limité de x en 0 à l'ordre 3 s'écrit $x + x^3\varepsilon(x)$. Par unicité du DL en 0 à l'ordre 3, on obtient $a = 0$ et $27b = \frac{1}{6}$, d'où $a = 0$ et $b = \frac{1}{162}$. Finalement, le développement limité de g en 0 à l'ordre 3 est

$$g(y) = \frac{1}{3}y + \frac{1}{162}y^3 + y^3\varepsilon(y).$$

Autre méthode pour le calcul du DL : d'après le théorème de Taylor-Young pour la fonction g en 0 à l'ordre 3,

$$g(y) = g(0) + g'(0)y + \frac{g''(0)}{2!}y^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}y^3 + y^3\varepsilon(y).$$

On sait déjà que $g(0) = 0$ et $g'(0) = \frac{1}{3}$. Pour obtenir $g''(0)$ et $g^{(3)}(0)$, dériver plusieurs fois $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ puis remplacer y par 0. Mais cette méthode est vraiment beaucoup trop longue. Essayez de faire les calculs pour vous en convaincre.

6) D'après le DL précédent, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $x = 0$ a pour équation $Y = \frac{1}{3}x$. De plus, la position est donnée par le terme suivant non nul dans le développement limité, c'est-à-dire $\frac{1}{162}x^3$. Il est positif si $x > 0$ et négatif sinon. Donc pour $x > 0$, la courbe est située au-dessus de la tangente et pour $x < 0$ elle est située en-dessous.