Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie | Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 | PCME12

Contrôle n° 2

Aucune calculatrice ni aucun document ne sont autorisés. Chaque résultat ou calcul devra être justifié.

Exercice 1. 1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) En appliquant le théorème, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

4) En déduire la limite $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 2. 1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2(x)$ et $\ln(\cos(x))$.

2) En déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))}.$$

Exercice 3. On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \sin^5(x) + 3\sin(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f est croissante.

2) Montrer que f est une bijection de I sur $J = f(I)$. Déterminer l'intervalle J.

3) On note g l'application réciproque de f. Déterminer l'ensemble des $y \in J$ tels que g est dérivable en y. Calculer la dérivée de g en 0.

4) Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

5) Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 3 en 0. Calculer ce développement limité.

6) Donner l'équation de la tangente au graphe $\mathcal{C}_g$ de g au point d'abscisse 0. Préciser la position de cette tangente par rapport à $\mathcal{C}_g$.