Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

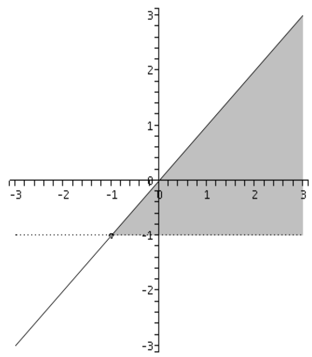
Correction du contrôle n^o 3

Exercice 1. On considère la fonction f de deux variables réelles définie par :

$$f(x,y) = \sqrt{x-y} + \ln(y+1).$$

1) $f(x,y)$ est défini si et seulement si $x - y \geq 0$ (car le domaine de définition de la racine carrée est $[0,+\infty[$) et $y+1 > 0$ (car le domaine de définition de ln est $]0,+\infty[$). Donc le domaine de définition de f est l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq y \text{ et } y > -1\}.$$



(le point de coordonnées $(-1,-1)$ n'est pas contenu dans le domaine de définition)

2) Commençons par justifier l'existence du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1,0,f(1,0))$. D'après le cours, il suffit de dire que la fonction f est dérivable au point $(1,0)$. Plusieurs arguments sont possibles :

   (a) f est une somme de fonctions dérivables en $(1,0)$ car $(x,y) \mapsto \sqrt{x-y}$ et $(x,y) \mapsto \ln(y+1)$ sont dérivables en $(1,0)$.

   (b) Soit $y > -1$ quelconque. La fonction $x \mapsto \sqrt{x-y} + \ln(y+1)$ est dérivable sur $]y,+\infty[$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ceci montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe pour tout (x,y) dans $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > y > -1\}$.
   Soit $x > -1$ quelconque. La fonction $y \mapsto \sqrt{x-y} + \ln(y+1)$ est dérivable sur $]-1,x[$ car $y \mapsto \ln y$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ceci montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe pour tout (x,y) dans U. De plus, un calcul montre que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} + \frac{1}{y+1}.$$

   Ces dérivées partielles sont *continues* sur U (comme somme de fonctions continues sur U). D'après le cours, f est donc dérivable sur U et en particulier en $(1,0)$.

On a alors :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$
Par ailleurs, $f(1,0)=1$. D'après le cours, l'équation du plan tangent est donc :
$$z=f(1,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y=1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y.$$

Remarque. La fonction f n'est pas dérivable sur $\mathcal{D}_f$: en effet, comme la racine carrée n'est pas dérivable en 0, la fonction $(x,y)\mapsto\sqrt{x-y}$ n'est pas dérivable sur la droite $y=x$. En fait, f est dérivable sur l'intérieur de $\mathcal{D}_f$, qui est U.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle : $(E)\quad y'=\frac{2}{x}y+x$.

1) - Une primitive de $\frac{2}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $2\ln(x)$. Donc les solutions de l'équation homogène
$$(E_H) \qquad y'=\frac{2}{x}y$$
sur $]0,+\infty[$ sont les $y(x)=Ce^{2\ln(x)}=Cx^2$, pour $C\in\mathbb{R}$.
   - On cherche une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante, sous la forme $y(x)=C(x)x^2$. On a $y'(x)=C'(x)x^2+2xC(x)$. En remplaçant dans (E), cela donne
$$x=y'-\frac{2}{x}y=C'(x)x^2+2xC(x)-\frac{2}{x}C(x)x^2=C'(x)x^2$$
d'où $C'(x)=\frac{1}{x}$. Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $\ln(x)$. Donc une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ est $x^2\ln(x)$.
   - Les solutions de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ sont les $y(x)=Cx^2+x^2\ln(x)$, où $C\in\mathbb{R}$.
   - On a $1=y(1)=C+\ln(1)=C$, donc $C=1$ et l'unique solution y_1 telle que $y_1(1)=1$ est
$$y_1(x)=x^2(1+\ln(x)).$$

2) - Une primitive de $\frac{2}{x}$ sur $]-\infty,0$ est $2\ln(-x)$. Donc les solutions de l'équation homogène (E_H) sur $]-\infty,0[$ sont les $y(x)=De^{2\ln(-x)}=D(-x)^2=Dx^2$, pour $D\in\mathbb{R}$.
   - On cherche une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante, sous la forme $y(x)=D(x)x^2$. Les mêmes calculs que ceux de la question 1 montrent que $D'(x)=\frac{1}{x}$. Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0$ est $\ln(-x)$. Donc une solution particulière de (E) sur $]-\infty,0[$ est $x^2\ln(-x)$.
   - Les solutions de (E) sur l'intervalle $]-\infty,0[$ sont les $y(x)=Dx^2+x^2\ln(-x)$, où $D\in\mathbb{R}$.
   - On a $1=y(-1)=D+\ln(1)=D$, donc $D=1$ et l'unique solution y_2 telle que $y_2(-1)=1$ est
$$y_2(x)=x^2(1+\ln(-x)).$$

3) Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}x^2(1+\ln(x)) & \text{si } x>0\\ x^2(1+\ln(-x)) & \text{si } x<0\end{cases}$.

   D'après les résultats de croissances comparées, on a
$$\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)=0$$
   donc d'une part,
$$\lim_{x\to0^+}(x^2(1+\ln(x)))=0$$
   d'autre part
$$\lim_{x\to0^-}(x^2(1+\ln(-x)))=0.$$
   Ces deux limites étant égales, $\lim_{x\to0}f(x)$ existe et vaut 0. Ceci montre que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction g qui vérifie $g(0)=0$.