Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Correction du devoir maison n° 1

Rappel. Un développement limité donne une information *locale* (au voisinage d'un point) et *qualitative* sur une fonction. Ainsi, si on a établi le développement limité d'une fonction f en 0 :

– on ne peut pas l'utiliser pour calculer la limite de f en $+\infty$;

– on ne peut pas déduire du développement des inégalités sur f.

Attention aux ε. Les termes d'erreur en $x^n\varepsilon(x)$, ou plus généralement $(x-a)^n\varepsilon(x-a)$ pour un développement limité au point a, doivent être *systématiquement présents* à chaque ligne de calcul faisant intervenir des DL. Il n'est pas question de les faire disparaître d'une ligne à l'autre. Sans ces termes d'erreur, ce que vous écrivez est tout bonnement faux !

Exercice 1.

1) Pour la première limite, on fait un développement limité du numérateur à l'ordre 3 en 0.

$$1+\sin(x) = 1+x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)$$
$$\sqrt{1+\sin(x)} = (1+(x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x))^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3+x^3\varepsilon(x)$$
$$= 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+x^3\varepsilon(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+x^3\varepsilon(x)$$
$$e^{-\frac{x}{2}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+x^3\varepsilon(x)$$
$$f(x) = \frac{-\frac{1}{24}x^3+x^3\varepsilon(x)}{x^3} = -\frac{1}{24}+\varepsilon(x)$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{24}$.

Pour la deuxième limite : les développements du numérateur et du dénominateur se factorisent par x. On commence par calculer un développement du numérateur à l'ordre 1.

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1+\frac{1}{2}x+x\varepsilon(x)$$
$$e^{\sqrt{1+\sin(x)}} = e^{1+\frac{1}{2}x+x\varepsilon(x)} = e\cdot e^{\frac{1}{2}x+x\varepsilon(x)} = e\cdot\left(1+\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)\right)$$

Donc le développement du numérateur est $e\frac{x}{2}+x\varepsilon(x))$.

$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x+x\varepsilon(x)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon(x)} = \frac{1}{x}(1+\varepsilon(x))$$
$$f(x) = e(\frac{1}{2}+\varepsilon(x))(1+\varepsilon(x)) = \frac{e}{2}+\varepsilon(x)$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{e}{2}$.

Pour la troisième limite, on utilise $x^x = e^{x\ln(x)}$ et le changement de variables $y = x-1$ qui permet de se ramener à une limite en 0.

$$\frac{e^{x\ln x}-x}{1-x+\ln x} = \frac{e^{(y+1)\ln(y+1)}-y-1}{\ln(1+y)-y} = \frac{e^{y\ln(y+1)}e^{\ln(y+1)}-y-1}{\ln(1+y)-y} = \frac{(y+1)(e^{y\ln(y+1)}-1)}{\ln(1+y)-y} = g(y)$$

Le développement du dénominateur se factorise par y^2 alors on développe le numérateur et le dénominateur à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned}
\ln(1+y) &= y + y\varepsilon(y)\\
y\ln(1+y) &= y^2 + y^2\varepsilon(y)\\
e^{y\ln(y+1)} &= 1 + y^2 + y^2\varepsilon(y)\\
g(y) &= \frac{(y+1)(y^2+y^2\varepsilon(y)}{y-\frac{y^2}{2}-y+y^2\varepsilon(y)} = \frac{y^2+y^2\varepsilon(y)}{-\frac{y^2}{2}+y^2\varepsilon(y)} = \frac{1+\varepsilon(y)}{-\frac{1}{2}+\varepsilon(y)}.
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{y\to0} f(y) = -2$.

Pour la quatrième limite, posons $y = \frac{1}{x}$.

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{\alpha}{x})} = e^{\frac{1}{y}\ln(1+\alpha y)}$$

On développe $\ln(1+\alpha y)$ à l'ordre 1 en 0.

$$\begin{aligned}
\ln(1+\alpha y) &= \alpha y + y\varepsilon(y)\\
\frac{\ln(1+\alpha y)}{y} &= \alpha + \varepsilon(y)\\
e^{\frac{1}{y}\ln(1+\alpha y)} &= e^{\alpha+\varepsilon(y)} = e^{\alpha}\cdot e^{1+\varepsilon(y)} = e^{\alpha}(1+\varepsilon(y)) = e^{\alpha}+\varepsilon(y).
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to0} e^{\frac{1}{y}\ln(1+\alpha y)} = e^{\alpha}$.

2) (a) Calculons un développement limité du numérateur de $f(x)$ à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}
1+2x+\cos(x) &= 2+2x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\\
\ln(1+2x+\cos(x)) &= \ln(2+2x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)) = \ln(2)+\ln(1+x-\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon(x))\\
&= \ln(2)+(x-\frac{x^2}{4})-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x) = \ln(2)+x-\frac{3}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)\\
\sqrt{1+2x} &= 1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\\
\ln(1+2x+\cos(x))-\sqrt{1+2x}+a &= \ln(2)+a-1-\frac{1}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)\\
f(x) &= \frac{\ln(2)+a-1}{x^2}-\frac{1}{4}+\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Donc $f(x)$ a une limite finie en 0 si et seulement si $\ln(2)+a-1=0$ c'est-à-dire $a = 1-\ln(2)$. Lorsque c'est le cas, $\lim_{x\to0} f(x) = -\frac{1}{4}$ et f est prolongeable par continuité en 0.

(b) Calculons la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ quand $x\to0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+2x+\cos(x))-\sqrt{1+2x}+1-\ln(2)+\frac{1}{4}x^2}{x^3}$$

Calculons un développement du numérateur en 0 à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}
1+2x+\cos(x) &= 2+2x-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)\\
\ln(1+2x+\cos(x)) &= \ln(2)+\ln(1+x-\frac{x^2}{4}+x^3\varepsilon(x))\\
&= \ln(2)+\left((x-\frac{x^2}{4})-\frac{1}{2}(x^2-2\frac{x^3}{4})+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)\\
&= \ln(2)+x-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{12}x^3+x^3\varepsilon(x)\\
\sqrt{1+2x} &= 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Donc le développement limité du numérateur est $\frac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)$. Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{12}+\varepsilon(x)$. La limite du taux d'accroissement en 0 est $\frac{1}{12}$. Donc f est dérivable en 0, de dérivée $\frac{1}{12}$.

Exercice 2.

1) En 0 à l'ordre 4, on a :

$$\begin{aligned}
2e^t-(t^3+1)^{1/3} &= 2(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+t^4\varepsilon(t))-(1+\frac{t^3}{3}+t^4\varepsilon(t))\\
&= 1+2t+t^2+\frac{t^4}{12}+t^4\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

2) On en déduit

$$\frac{2e^t-(t^3+1)^{1/3}}{t}=\frac{1}{t}+2+t+\frac{t^3}{12}+t^3\varepsilon(t)$$

donc $a=1$, $b=0$ et $c=\frac{1}{12}$.

3) Posons $f(x)=2xe^{\frac{1}{x}}-(x^3+1)^{1/3}$.

(a) Posons $t=\frac{1}{x}$. On a

$$f(x)=\frac{2}{t}e^t-(t^{-3}+1)^{1/3}=\frac{2}{t}e^t-\frac{t}{t}(t^{-3}+1)^{1/3}=\frac{1}{t}\left(2e^t-(t^3+1)^{1/3}\right)$$

donc le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ est

$$\frac{1}{t}+2+t+\frac{t^3}{12}+t^3\varepsilon(t)=x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{12x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

Remarque : on ne peut pas développer directement $(t^{-3}+1)^{1/3}$ en utilisant le développement usuel de $(1+y)^{1/3}$ car ce développement est valable en 0 mais $\lim_{t\to 0^+} t^{-3}=+\infty$ n'est pas égale à 0.

(b) D'après ce qui précède, au voisinage de $+\infty$, $f(x)=x+2+\varepsilon(\frac{1}{x})$, donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=0$. La droite oblique d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Exercice 3.

1) (a) $\ln(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)$

(b) $1-\ln(1-\frac{x}{2}) = 1-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon(x)\right) = 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)$.

(c) $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)$
$(1+u)^{-1/2} = 1-\frac{u}{2}+\frac{3}{8}u^2+u^2\varepsilon(u)$

(d) À l'ordre 2 en 0, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} &= (1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+x^2\varepsilon(x))(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x))\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

2) (a) Si $x>0$, l'expression qui définit f a un sens si et seulement si $1+x^2>0$ et $1+x\geqslant 0$ ce qui revient à dire $x\geqslant -1$. Mais comme $x>0$, $x\geqslant -1$. Si $x<0$, l'expression qui définit f a un sens si et seulement si $1-\frac{x}{2}>0$ c'est-à-dire $x<2$. Mais comme $x<0$, $x<2$. Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et quotients de fonctions continues (dont le dénominateur ne s'annule pas). Pour $x<0$, $f(x)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Pour $x>0$, $f(x)$ est dérivable comme composée et quotient de fonctions dérivables (noter qu'il n'y a pas de problème avec la non-dérivabilité de $y\mapsto\sqrt{y}$ en 0, puisque ce qui est sous la racine ne prend jamais la valeur 0).

(b) On a directement $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1-\ln(1) = 1$. Ces deux limites étant égales, f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ vérifiant $\tilde{f}(0)=1$.

(c) Calculons $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$. Le D.L. établi précédemment donne $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$. À gauche de 0, on a $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{-\ln(1-\frac{x}{2})}{x} = \frac{\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)}{x} = \frac{1}{2}+\varepsilon(x)$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand $x\to 0^-$. Ces deux limites étant finies et égales, $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $(\tilde{f})'(0) = \frac{1}{2}$.

(d) Sur $]0,+\infty[$, la fonction $1-\ln(1-\frac{x}{2})$ est croissante : en effet, $1-\frac{x}{2}$ est décroissante, ln est croissante donc $\ln(1-\frac{x}{2})$ est décroissante. De plus, $\tilde{f}$ est continue sur cet intervalle donc $\tilde{f}(]0,+\infty[)$ est un intervalle. Comme la fonction est décroissante, $\tilde{f}(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \tilde{f}(0)[=]-\infty,1[$.

(e) L'équation de la tangente au graphe de $\tilde{f}$ en 0 est $y=\tilde{f}(0)+(\tilde{f})'(0)x = 1+\frac{1}{2}x$. À droite de 0, d'après la question 1b), le terme suivant non nul dans le développement de $\tilde{f}(x)$ est $-\frac{5}{8}x^2$, qui est négatif, donc le graphe est en-dessous de la tangente. À gauche de 0, d'après la question 1d), le terme suivant non nul dans le développement de $\tilde{f}(x)$ est $\frac{1}{8}x^2$, qui est positif, donc le graphe est au-dessus de la tangente.

3) (a) Pour $x<0$, on a

$$\begin{aligned}1-\ln(1-\frac{x}{2}) &= 1-\ln(1-\frac{-4+x+4}{2}) = 1-\ln(3-\frac{x+4}{2}) = 1-\left(\ln 3+\ln(1-\frac{x+4}{6})\right)\\ &= 1-\ln 3-\left(-\frac{x+4}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{x+4}{6}\right)^2+(x+4)^2\varepsilon(x+4)\right)\\ &= 1-\ln 3+\frac{1}{6}(x+4)+\frac{1}{72}(x+4)^2+(x+4)^2\varepsilon(x+4)\end{aligned}$$

(b) Comme f est deux fois dérivable en -4, on en déduit par la formule de Taylor-Young :

$$f'(-4) = \frac{1}{6} \qquad f''(-4) = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}.$$

(c) L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse -4 est :

$$y = f(-4)+f'(-4)(x+4) = 1-\ln 3+\frac{1}{6}(x+4).$$

La position est donnée par le signe du terme suivant non nul dans le DL en -4, ici $\frac{1}{72}(x+4)^2 > 0$. Donc la courbe est située au-dessus de sa tangente au voisinage de -4.

4) Pour obtenir un développement de F à l'ordre 4, il faut établir un développement de $x\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$ en 0 à l'ordre 3. Pour cela, on utilise le développement de $\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$ en 0 à l'ordre 2 obtenu à la question 1d).

$$x\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{8}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

Le résultat du cours sur l'intégration des D.L. donne alors

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{5}{8\times 4}x^4 + x^4\varepsilon(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{5}{32}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

5) (a) Au voisinage de $+\infty$, $\psi(x) = x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$. Posons $y = \frac{1}{x}$ pour nous ramener au voisinage de 0. On a

$$\psi(x) = y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}} = y^{-\frac{3}{2}}\sqrt{y\frac{1+y}{1+y^2}} = y^{-1}\sqrt{\frac{1+y}{1+y^2}}$$

En utilisant le D.L. en 0 de la question 1d), on obtient

$$y^{-1}\sqrt{\frac{1+y}{1+y^2}} = \frac{1}{y}(1+\frac{1}{2}y - \frac{5}{8}y^2 + y^2\varepsilon(y)) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}y + y\varepsilon(y)$$

donc le développement asymptotique de $\psi(x)$ en 0 est

$$\psi(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{5}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

On en déduit que la courbe représentative de ψ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite oblique d'équation $Y = x + \frac{1}{2}$. La position est donnée par le signe de $-\frac{5}{8x}$, qui est négatif au voisinage de $+\infty$, donc la courbe est située en-dessous de l'asymptote.

(b) Au voisinage de $-\infty$, $f(x) = 1 - \ln(x - \frac{1}{2})$. Posons $y = \frac{1}{x}$ pour nous ramener au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \ln(1 - \frac{1}{2y}) = 1 - \ln(\frac{-y}{-y}(1 - \frac{1}{2y})) = 1 - \ln(\frac{-1}{y}(\frac{1}{2} - y) = 1 - \ln(-\frac{1}{y}) - \ln(\frac{1}{2} - y) \\ &= 1 - \ln(-\frac{1}{y}) - \left(\ln(\frac{1}{2}) + \ln(1-2y)\right) = 1 - \ln(-\frac{1}{y}) - \left(\ln(\frac{1}{2}) - 2y + y\varepsilon(y)\right) \\ &= 1 + \ln 2 - \ln(-\frac{1}{y}) + 2y + y\varepsilon(y) = 1 + \ln 2 - \ln(-x) + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Remarque : on ne pouvait pas développer directement $\ln(1 - \frac{1}{2y})$ en utilisant le développement usuel de $\ln(1+Y)$ car ce développement n'est valable qu'en 0 et $\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{2y} = +\infty$ n'est pas égal à 0.

Pour montrer que la courbe n'a pas d'asymptote oblique en $-\infty$, raisonnons par l'absurde. Supposons que la droite d'équation $Y = ax + b$ soit asymptote en $-\infty$. Alors $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$. Or,

$$f(x) - (ax+b) = 1 + \ln 2 - b - ax - \ln(-x) + \varepsilon(\frac{1}{x})$$

Comme $\lim_{x\to-\infty}(1+\ln 2 - b + \varepsilon(\frac{1}{x}))$ est finie, nécessairement $\lim_{x\to-\infty}(-ax - \ln(-x)) = \lim_{z\to+\infty}(az - \ln(z))$ est finie. Mais si $a \leqslant 0$, on voit tout de suite que cette limite vaut $-\infty$; si $a > 0$, elle vaut $+\infty$ par croissance comparée. En aucun cas elle est finie. Nous avons obtenu une contradiction.

Donc la courbe n'a pas d'asymptote en $+\infty$.