Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Devoir de maison n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1. Développement limité et calcul de limites.

1) Trouver, si elles existent, les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}+e^{-\frac{x}{2}}-2}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2) Soit f la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(1+2x+\cos x)-\sqrt{1+2x}+a}{x^2} \qquad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

a. Déterminer le réel a pour que f soit prolongeable par continuité en 0.
b. Le prolongement ainsi obtenu est-il dérivable en 0 ?

Exercice 2. Développement limité et comportement asymptotique.

1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$t \mapsto 2e^t - (t^3+1)^{\frac{1}{3}}.$$

2) Déduire qu'il existe des nombres réels a, b, c, tels que :

$$\frac{2e^t-(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}{t} = \frac{1}{t} + 2 + at + bt^2 + ct^3 + t^3\varepsilon(t).$$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} - (x^3+1)^{\frac{1}{3}}.$$

a. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, trouver le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3.
b. Déduire l'équation de l'asymptote oblique de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. Développement limité et étude de fonctions.

1)
a. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1-u)$.
b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $1-\ln(1-\dfrac{x}{2})$.
c. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}$ et de $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$.
d. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

2) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1-\ln(1-\frac{x}{2}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a. Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
b. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en une fonction que l'on notera $\tilde{f}$. Que vaut $\tilde{f}(0)$?
c. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $(\tilde{f})'(0)$?
d. Quelle est l'image de l'intervalle $]-\infty, 0[$ par la fonction $\tilde{f}$?
e. Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de $\tilde{f}$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

3)
a. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de -4.
b. En déduire les valeurs de $f'(-4)$ et de $f''(-4)$.
c. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -4 et la position de la courbe par rapport à cette tangente (au voisinage de -4 uniquement).

4) Soit F la primitive de $x\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$ telle que $F(0) = -1$. Donner le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

5)
a. Montrer que la courbe représentative de $\psi(x) = x^{\frac{3}{2}}f(x)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$. Donner son équation, et déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
b. Montrer que la courbe représentative de f n'a pas d'asymptote au voisinage de $-\infty$.