Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1.

1) La fonction f est deux fois dérivable sur $]a, a+h[$ (car elle l'est sur I) et f' est continue sur $[a, a+h]$ (car f' est dérivable donc continue sur I). D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]a, a+h[$ vérifiant

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(c).$$

2) Posons $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0,0008$. Prenons pour intervalle $I =]0, +\infty[$. La fonction f est deux fois dérivable sur I. De plus, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$. D'après la question précédente, il existe c avec $a < c < a+h$ tel que

$$\sqrt{4,00008} = f(a+h) = \sqrt{4} + h\frac{1}{2\sqrt{4}} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{-1}{4c^{3/2}} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{8c^{3/2}}.$$

On remplace h par sa valeur ($h = 8.10^{-4}$).

$$\sqrt{4,00008} = 2 + 2.10^{-4} - \frac{8^2 \cdot 10^{-8}}{8c^{3/2}} = 2,0002 - \frac{8 \cdot 10^{-8}}{c^{3/2}}$$

On a donc

$$\left|\sqrt{4,00008} - 2,0002\right| \leqslant \frac{8 \cdot 10^{-8}}{|c|^{3/2}}.$$

Comme $a < c$ et $\frac{3}{2} > 1$, on a $a^{3/2} < c^{3/2}$ donc

$$\frac{1}{c^{3/2}} < \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{1}{4^{3/2}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Donc

$$\left|\sqrt{4,00008} - 2,0002\right| \leqslant 10^{-8}.$$

Cela signifie que $2,0002$ est une valeur approchée de $\sqrt{4,00008}$ à 10^{-8} près. Notez bien que nous n'avons pas utilisé de calculatrice.

3) On souhaite calculer une valeur approchée de $\sin(0,01)$ à 10^{-8} près. Posons $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, prenons $a = 0$ et $h = 0,01$. La fonction f est dérivable autant de fois qu'on le souhaite sur I. La formule de Taylor-Lagrange avec un reste en $f^{(n)}$ nous dit qu'il existe un $c \in]a, a+h[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

Pour trouver la valeur approchée à 10^{-8} près, on doit trouver un entier n (le plus petit, si possible) vérifiant

$$\left|\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)\right| \leqslant 10^{-8}.$$

Comme $f(x) = \sin(x)$, suivant la valeur de n, $f^{(n)}(x)$ vaut $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$ ou $\sin(x)$. Dans tous les cas, on a

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \leqslant 1.$$

Donc

$$\left|\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)\right| \leqslant \frac{h^n}{n!} \leqslant h^n$$

Notons log le logarithme de base 10 (c'est-à-dire qu'il vérifie $\log(10) = 1$). Maintenant, si

$$h^n \leqslant 10^{-8}$$

alors

$$n \log h \leqslant -8 \log(10) = -8.$$

Comme $h < 1$, $\log(h) < 0$ donc cela donne

$$n \geqslant \frac{-8}{\log h} = \frac{-8}{\log(10^{-2})} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Donc si on applique la formule de Taylor-Lagrange avec un reste en $f^{(4)}$, on est assurés d'obtenir une valeur approchée de $\sin(0,01)$ à 10^{-8} près.
Comme pour la question 2, en appliquant la formule, on a

$$\left|f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2!}f''(a) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)\right| \leqslant 10^{-8}.$$

Or,

$$f(a) = \sin(0) = 0 \qquad f'(a) = \cos(0) = 1 \qquad f''(a) = -\sin(0) = 0 \qquad f^{(3)}(a) = -\cos(0) = -1$$

d'où

$$\left|f(a+h) - (h - \frac{h^3}{3!})\right| \leqslant 10^{-8}.$$

La valeur approchée cherchée est donc

$$h - \frac{h^3}{3!} \simeq 0,00999984.$$

Exercice 2.

1) (a) Pour montrer que F est définie sur $]0,1]$, il suffit de montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $\frac{1}{x} + \lambda - 1$ est dans le domaine de définition de f, qui est $[\lambda + \infty[$. Soit $x \in]0,1]$. Comme $x \leqslant 1$, on a

$$\frac{1}{x} \geqslant 1$$

$$\frac{1}{x} + \lambda - 1 \geqslant 1 + \lambda - 1 = \lambda.$$

C'est ce qu'il fallait montrer. Donc F est définie sur $]0,1]$.

(b) La fonction F est la composée des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x} + \lambda - 1$, qui est continue sur $]0,1]$ et f qui est continue sur $[\lambda, +\infty[$. Donc F est continue sur $]0,1]$.
La fonction F est la composée des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x} + \lambda - 1$, qui est dérivable sur $]0,1]$ et f qui est dérivable sur $]\lambda, +\infty[$. Donc F est dérivable sur $]0,1[$.

(c) Montrons que F se prolonge par continuité en 0. Pour cela, on calcule

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x} + \lambda - 1).$$

Or, $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \lambda - 1) = +\infty$ et f est continue sur $[\lambda, +\infty[$, donc par composition des limites,

$$\lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x} + \lambda - 1) = \lim_{y \to +\infty} f(y) = 0$$

par hypothèse sur f. Donc $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$ et F est prolongeable par continuité en 0. On note encore F la fonction prolongée. Elle vérifie $F(0) = 0$.

(d) D'après ce qui précède, $F(0) = 0$. Par ailleurs, $F(1) = f(1 + \lambda - 1) = f(\lambda) = 0$ par hypothèse sur f. Comme F est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ (question b), d'après le théorème de Rolle, il existe au moins un $c \in]0, 1[$ tel que $F'(c) = 0$.

(e) Calculons la dérivée de F en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x} + \lambda - 1).$$

Comme $F'(c) = 0$ et $\frac{1}{c^2} \neq 0$, on a donc $f'(\frac{1}{c} + \lambda - 1) = 0$. Comme $c \in]0, 1[$, le nombre $\frac{1}{c} + \lambda - 1$ est dans $]\lambda, +\infty[$. Donc f' s'annule en au moins un point de $]\lambda, +\infty[$.

2) Posons $f(x) = g(-x)$ pour tout $x \in [\lambda, +\infty[$. Comme le domaine de définition de g est $] - \infty, \lambda]$, celui de f est $[-\lambda, +\infty[$. Comme $g(\lambda) = 0$, $f(-\lambda) = 0$. De plus,

$$0 = \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{y \to +\infty} g(-y) = \lim_{y \to \infty} f(y).$$

Enfin, f est continue sur $[-\lambda, +\infty[$ car g l'est sur $] - \infty, \lambda]$ et f est dérivable sur $] - \lambda, +\infty[$ car g l'est sur $] - \infty, \lambda[$.

On peut donc appliquer le résultat de la question 1e à la fonction f et au réel $-\lambda$. Il existe au moins un $c \in] - \lambda, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. Or, par le théorème de dérivation des fonctions composées, $f'(x) = -g'(-x)$. Donc $g'(-c) = 0$, avec $-c \in] - \infty, \lambda[$.

Exercice 3.

1) $g(x, y) = y - x + \arctan(y) - \arctan(x)$.

(a) La fonction arctan a pour domaine de définition $\mathbb{R}$. Donc le domaine de définition de la fonction g est $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc l'application partielle $x \mapsto y - x + \arctan(y) - \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et l'application partielle $y \mapsto y - x + \arctan(y) - \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Leurs dérivées sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u, v) = -1 - \frac{1}{1 + u^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(u, v) = 1 + \frac{1}{1 + v^2}$$

(b) On commence par justifier qu'on peut utiliser le résultat du cours sur le plan tangent. Pour cela, il faut que la fonction g soit dérivable en $(1, 1)$. Plusieurs justifications sont possibles :
- la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$: en effet, les fonctions de deux variables définies par x, y, $\arctan(x)$ et $\arctan(y)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^2$ (la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$). En particulier, g est dérivable en $(1, 1)$;
- les dérivées partielles calculées à la question précédente sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elles sont continues sur un ouvert (c'est-à-dire un petit disque ouvert) autour de $(1, 1)$. D'après un résultat du cours, g est donc dérivable en $(1, 1)$.

On a $g(1, 1) = 1 - 1 + \arctan(1) - \arctan(1) = 0$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

D'après le cours, l'équation du plan tangent au point $(1, 1, 1)$ est :

$$z = g(1, 1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)(y - 1) = -\frac{3}{2}(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y.$$

2) $\varphi(x) = \arctan(x) + x$.

(a) La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ car arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 1 \geqslant 1 > 0$$

donc φ est *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle est continue, par le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$]\lim_{x\to-\infty} \varphi(x), \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)[.$$

Or,

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Finalement, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Notons ψ l'application réciproque de φ. D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, ψ est dérivable en les $y \in \mathbb{R}$ qui vérifient $\varphi'(\psi(y)) \neq 0$. Comme $\varphi' > 0$, on a toujours $\varphi'(\psi(y)) > 0$ donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Toujours d'après le théorème, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(\psi(y))} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\psi(y)^2}} = \frac{1+\psi(y)^2}{2+\psi(y)^2}.$$

3) Soit $c \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation $g(x,y) = c$. On commence par remarquer que $g(x,y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, de sorte que l'équation équivaut à :

$$\varphi(y) - \varphi(x) = c$$

c'est-à-dire

$$\varphi(y) = \varphi(x) + c.$$

Comme ψ est la bijection réciproque de φ, cette équation *équivaut* à l'équation suivante, qu'on obtient en composant avec ψ :

$$y = \psi(\varphi(y)) = \psi(\varphi(x) + c).$$

La fonction θ cherchée est donc définie par

$$\theta(x) = \psi(\varphi(x) + c)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de ψ, qui est dérivable d'après la question 2b) et et $x \mapsto \varphi(x) + c$ qui est dérivable (car φ l'est). Sa dérivée est :

$$\begin{aligned}\theta'(x) = \varphi'(x)\psi'(\varphi(x)+c) &= \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \frac{1 + (\psi(\varphi(x)+c))^2}{2 + \psi((\varphi(x)+c))^2} \\ &= \frac{2+x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1+\psi((\varphi(x)+c))^2}{2+\psi((\varphi(x)+c))^2} = \frac{2+x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1+\theta(x)^2}{2+\theta(x)^2}\end{aligned}$$

4) $G(x,y) = \begin{cases} y - x + \arctan(y) - \arctan(x) & \text{si } y \leqslant x \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y & \text{si } y > x \end{cases}$ Montrons que les applications partielles $x \mapsto G(x,1)$ et $y \mapsto G(1,y)$ sont dérivables en 1 (respectivement 1). Pour cela, on calcule la limite de leurs taux d'accroissements.

$$\lim_{x\to1} \frac{G(x,1) - G(1,1)}{x-1}.$$

On a $G(1,1) = 1 - 1 + \arctan(1) - \arctan(1) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{G(x,1)-G(1,1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\arctan(1)-\arctan(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\varphi(1)-\varphi(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = -\varphi'(1) = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(car φ est dérivable en 1). De même,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{G(x,1)-G(1,1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}{x-1} = -\frac{3}{2}.$$

Donc $\lim_{x\to 1} \frac{G(x,1)-G(1,1)}{x-1}$ existe et vaut $-\frac{3}{2}$. Cela signifie que G possède une dérivée partielle par rapport à x en $(1,1)$ et $\frac{\partial G}{\partial x}(1,1) = -\frac{3}{2}$.
Pour l'autre dérivée partielle, on calcule.

$$\lim_{y\to 1} \frac{G(1,y)-G(1,1)}{y-1}.$$

On a

$$\lim_{y\to 1^+} \frac{G(1,y)-G(1,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1^+} \frac{y-1+\arctan(y)-\arctan(1)}{y-1} = \varphi'(1) = \lim_{y\to 1^+} \frac{\varphi(y)-\varphi(1)}{y-1} = \frac{3}{2}.$$

De même,

$$\lim_{y\to 1^-} \frac{G(1,y)-G(1,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1^-} \frac{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}y}{y-1} = \frac{3}{2}.$$

Donc $\lim_{y\to 1} \frac{G(1,y)-G(1,1)}{y-1}$ existe et vaut $\frac{3}{2}$. Cela signifie que G possède une dérivée partielle par rapport à y en $(1,1)$ et $\frac{\partial G}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}$.

Remarque. On a : $G(x,1) = \begin{cases} 1-x+\arctan(1)-\arctan(x) & \text{si } x \geqslant 1 \\ -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Pourtant, on *ne peut pas dire directement* que :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,1) = \begin{cases} -1-\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ -\frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

Par contre, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,1) = \begin{cases} -1-\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \\ -\frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

En effet, tout le problème se situe au point $x = 1$, là où il y a recollement. Voici un exemple où les choses ne se passent pas bien. La fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Par contre, elle n'est pas dérivable en 1 (vérifiez-le en calculant les limites des taux d'accroissements à gauche et à droite de 1). Donc on peut seulement écrire :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$