Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Devoir de maison n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1. Application de la formule de Taylor.

Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

1) Soit $h > 0$ tel que $a+h \in I$. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre 2 (c'est-à-dire avec un reste en f'') sur l'intervalle $[a, a+h]$.
2) En déduire, sans calculatrice et en détaillant vos calculs, une valeur approchée de $\sqrt{4,0008}$ à 10^{-8} près. *Indication :* poser $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0,0008$.
3) On souhaite calculer une valeur approchée de $\sin(0,01)$ à 10^{-8} près par la même méthode. À quel ordre suffit-il d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction sin ? Calculer la valeur approchée demandée, sans calculatrice et en détaillant vos calculs.

Exercice 2. Étude globale.

1) Soit λ un réel et f une fonction continue sur l'intervalle $[\lambda, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]\lambda, +\infty[$, et qui vérifie $f(\lambda) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Soit F la fonction définie par

$$F : \begin{array}{rcl}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\frac{1}{x} + \lambda - 1). \end{array}$$

   a) Justifier que F est bien définie sur $]0,1]$.
   b) Montrer que F est continue sur $]0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
   c) Montrer que F est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. On notera encore F la fonction ainsi prolongée.
   d) Montrer que F' s'annule en au moins un point de $]0,1[$.
   e) En déduire que f' s'annule en au moins un point de $]\lambda, +\infty[$.
2) Soit g une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, \lambda]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty, \lambda[$ et telle que $g(\lambda) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$. Montrer que g' s'annule en au moins un point de l'intervalle $]-\infty, \lambda[$.
(On pourra appliquer le résultat de la question 1 pour une fonction f bien choisie)

Exercice 3. Fonctions de plusieurs variables

1) Soit g la fonction de deux variables définie par $g(x,y) = y - x + \arctan(y) - \arctan(x)$.
   a) Calculer les dérivées partielles de la fonction g au point (u,v).
   b) Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = g(x,y)$ au point de coordonnées $(1, 1, g(1,1))$.
2) On pose $\varphi(x) = \arctan(x) + x$.
   a) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   b) On note ψ l'application réciproque de φ. En quels réels ψ est-elle dérivable ? Calculer ψ' en fonction de ψ.
3) Soit c un nombre réel. À l'aide des fonctions φ et ψ, trouver une fonction θ, définie sur $\mathbb{R}$, telle que la ligne de niveau $g(x,y) = c$ soit la courbe $y = \theta(x)$. Montrer que la fonction θ est dérivable et calculer sa dérivée θ' en fonction de θ et x.
4) Montrer que la fonction G définie par $G(x,y) = \begin{cases} y - x + \arctan(y) - \arctan(x) & \text{si } y \le x \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y & \text{si } y > x \end{cases}$
a des dérivées partielles au point $(1,1)$.