Feuille 1 : quelques corrections

Exercice 3.

2) Pour mémoire, voici la définition d'une application surjective. *Soient A et B des ensembles et $u : A \to B$ une application. On dit que u est* surjective *si, pour tout b dans B, il existe a dans A tel que $u(a) = b$.*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications telles que $g \circ f$ est surjective. On nous demande de montrer que g est surjective. Pour cela, on utilise la définition rappelée ci-dessus. Prenons donc un élément quelconque z de G et trouvons un élément y de F tel que $g(y) = z$.

Comme $g \circ f$ est surjective, on sait qu'il existe un élément, notons-le x, dans E tel que $(g \circ f)(x) = z$. Par définition de la composition des fonctions, on a donc $(g(f(x)) = z$. Posons maintenant $y = f(x)$. On a donc $g(y) = z$. On a trouvé un y vérifiant la propriété voulue. En conclusion, $g \circ f$ est surjective.

Exercice 4. Vrai/faux.

1) Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et notons $f^{-1} : J \to I$ sa réciproque (qui existe puisque f est bijective). Alors f vérifie :

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

pour tout x dans I. Cela équivaut à : $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout y dans J. En général, on n'a PAS $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x$. Voici un contre-exemple : prenez $f(x) = \ln(x)$, alors $f^{-1}(x) = e^x$ et $e^x \ln(x)$ n'est pas toujours égal à x (faire $x = 1$...).

2) Vrai. Voici la démonstration pour deux fonctions paires f et g de I dans J. Prenons un x quelconque dans I. On a : $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ (on a utilisé le fait que f et g sont paires). Donc $f + g$ est paire.

3) Faux. On a bien $(-x)^2 = x^2$. Mais si x est dans $[-1, 2]$, $-x$ ne tombe pas forcément dans $[-1, 2]$ (cela ne marche pas pour $x = 2$). Donc la fonction n'est pas paire.

4) Faux. Prenez par exemple la fonction qui vaut -1 sur $]-\infty, 0]$ et 2 sur $]0, +\infty[$.

5) Vrai et ce n'est pas n'importe quelle fonction. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à la fois paire et impaire. On a donc, pour tout x dans I, $f(-x) = -f(x)$ et $f(-x) = f(x)$ donc $f(-x) = -f(-x)$ d'où $2f(-x) = 0$ d'où $f(-x) = 0$. Cette fonction est donc la fonction nulle (celle qui vaut zéro partout).

6) Faux : on n'a pas forcément $\frac{1}{f(x)} = f^{-1}(x)$ (on rappelle que la notation f^{-1} désigne la fonction réciproque de f). Prenez par exemple $f(x) = x^2$ dont la réciproque est $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

7) Vrai pour la composée et la somme et faux pour le produit. Soient f et g deux fonctions croissantes. Prenons x et y quelconques vérifiant $x \geq y$. Alors $f(x) \geq f(y)$ (car f est croissante) donc $g(f(x)) \geq g(f(y))$ (car g est croissante). Voilà pour la composée. Pour la somme, par croissance de f et g, comme $x \geq y$, on a $f(x) \geq f(y)$ et $g(x) \geq g(y)$. On en déduit : $f(x) + g(x) \geq f(y) + g(x) \geq f(y) + g(y)$.

Pour le produit : prenez $f(x) = x$ et $g(x) = -1$. Elles sont toutes les deux croissantes et pourtant $f(x)g(x) = -x$ est décroissante. En essayant d'adapter la démonstration de la somme au cas du produit, on obtient facilement le résultat suivant : *si* f ou g est positive, le produit fg est croissant.

8) Vrai. Soient f croissante et g décroissante. Prenons x et y quelconques vérifiant $x \geq y$. Comme f est croissante, on obtient $f(x) \geq f(y)$ puis comme g est décroissante, $g(f(x)) \leq g(f(y))$, donc $g \circ f$ est décroissante. Même type de démonstration avec f décroissante et g croissante.

Exercice 11. Quelques indications pour les limites.

3) Rentrer le x dans la racine carrée (attention au signe de x). Limite obtenue : 1 si $x \to 0^+$ et -1 si $x \to 0^-$. Il n'y a donc pas de limite en 0.

4) « Casser » le $\ln(\frac{a}{b})$ en $\ln(a) - \ln(b)$. Ensuite, on peut utiliser le résultat suivant, connu et à connaître :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

(question supplémentaire : redémontrez que la limite ci-dessus vaut bien 1 ; pour cela, on peut l'exprimer comme limite d'un taux d'accroissement c'est-à-dire une dérivée). Limite obtenue : 2.

5) Limite en $-\infty$: 0. Limite en $+\infty$: factoriser par e^x dans le logarithme. Limite obtenue : 1.

6) En $+\infty$: on peut écrire la fonction sous la forme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (justifiez). Appliquez alors la technique vue en TD sur la question 7) de l'exercice. La limite obtenue est 0. En $-\infty$: factoriser par x^2 dans la racine carrée puis factoriser toute l'expression par x. On trouve $+\infty$.

8) Tout factoriser par x. Il reste à déterminer la limite de $\frac{\ln(x^2+4)}{x}$. Changer son expression afin de pouvoir utiliser la limite suivante, connue et à connaître :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Limites obtenues : $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$.