Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie | Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 | PCME12

Feuille d'exercices n° 1

Notation. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Attention. « Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ la fonction définie par $f(x) = 3x$ ». Dans cette phrase, plusieurs objets sont en jeu : f est une *fonction*, x est un *nombre* qui appartient à I, $f(x)$ est un *nombre* qui appartient à J et appelé l'*image de x* par la fonction f.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1)\ x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2} \quad 2)\ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x} \quad 3)\ x \mapsto \frac{1}{\ln(\ln(x))} \quad 4)\ x \mapsto \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

Exercice 2. Tracer sur un même repère l'allure des graphes des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto e^{-x}$; $x \mapsto e^{|x|}$; $x \mapsto -e^{-|x-1|}$
2) $x \mapsto \ln(x)$; $x \mapsto \ln(x)+1$;
3) $x \mapsto |\ln x|$; $x \mapsto \ln|x|$; $x \mapsto -\ln|x-1|$
4) $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^4$
5) $x \mapsto x^{1/2}$; $x \mapsto x^{1/3}$; $x \mapsto x^{1/4}$

Exercice 3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Montrer que :

1) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2) si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective ;
3) si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 0$.

Exercice 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1) La fonction réciproque f^{-1} de f vérifie $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x$.
2) La somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
3) La fonction $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est paire.
4) Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est soit paire, soit impaire.
5) Il existe une fonction à la fois paire et impaire.
6) L'inverse d'une fonction est sa réciproque.
7) La somme (resp. le produit, la composée) de deux fonctions croissantes est croissante.
8) La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Exercice 5. On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Est-elle injective ? Surjective ? Déterminer des intervalles $I \subset]0,+\infty[$ et $J \subset [0,+\infty[$ tels que la restriction de f à I soit bijective.

Exercice 6. On considère l'homographie $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{2x-3}$.

1) Donner les équations de ses deux asymptotes et de son centre de symétrie.
2) Déterminer la réciproque f^{-1} de f et son domaine de définition.

Exercice 7. 1) On considère les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 1 + \ln(x^2 - x - 2)$ et $g(x) = e^x$. Donner le domaine de définition de $g \circ f$ et déterminer $g \circ f$.

2) On considère les deux fonctions suivantes f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ et $g(x) = x^2$. Donner les domaines de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ et déterminer ces fonctions.

Exercice 8. On rappelle la formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

1) Calculer $e^{i\pi}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{3i\pi/4}$.
2) Retrouver les formules trigonométriques d'addition, i.e. $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\cos 2a$, $\sin 2a$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$, et $\cos b$.

Exercice 9. Après avoir déterminé leur ensemble de définition, résoudre les équations suivantes :

1) $\ln \sqrt{3x-1} + \ln \sqrt{x-1} = \ln(x-2)$
2) $\frac{1}{2} \ln 2x + \ln \sqrt{x+1} = \ln(3-x)$
3) $\ln(x^2 - 1) + 2\ln(2) = \ln(4x - 1)$
4) $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$
5) $4^x - 12.2^x + 32 = 0$

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$.

1) Déterminer son ensemble de définition.
2) Déterminer les x tels que a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 1$.

Exercice 11. Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$, $x \to -1$
2) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$, $x \to \pm\infty$
3) $x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$, $x \to 0$
4) $\dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x \to 0$
5) $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$, $x \to \pm\infty$
6) $\sqrt{x^2+2x+5} - x - 1$, $x \to \pm\infty$
7) $\dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$, $x \to 0$
8) $x + 3 - \ln(x^2 + 4)$, $x \to \pm\infty$

Exercice 12. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, ses variations et représenter son graphe :

1) $x \mapsto \dfrac{x-2}{x+3}$
2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2+1}$
3) $x \mapsto |\ln(x^2 - 1)|$
4) $x \mapsto \ln(x^4 + x^2 + 1)$
5) $x \mapsto \sqrt{x} - \ln(x)$
6) $x \mapsto x^{-\ln(x)}$