Feuille 2 : quelques corrections

Exercice 4.

1) Pour démontrer les inégalités, on peut procéder par une double étude de fonctions.

Soit f la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables), de dérivée $f'(x) = 1 - \cos(x)$. En particulier, $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante. Comme $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$. On a donc, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, l'inégalité $x \geq \sin(x)$.

Soit g la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$. On l'étudie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable, de dérivée $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$, donc g est croissante sur cet intervalle. Comme $g(0) = 0$, on en déduit l'inégalité $g(x) \geq g(0) = 0$, valable pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}[$. Cela donne la seconde inégalité cherchée.

2) Pour $x \neq 0$, la première inégalité donne : $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$. La deuxième donne : $x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ d'où $\frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$ (car $x \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$ sur l'intervalle). Finalement, $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}[$. Le théorème d'encadrement donne alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Par ailleurs, la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ est paire (on le vérifie directement), donc $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Pour la deuxième limite, on peut procéder de la manière suivante.

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{x}{1+\cos(x)}.$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\cos(x)} = 0$, on en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$.

Pour la troisième limite, le calcul précédent montre que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = (\frac{\sin(x}{x})^2 \frac{1}{1+\cos(x)}$ d'où $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Quelques indications pour les limites (*ne passez pas trop de temps sur ce type de calcul de limites, ce n'est pas un point essentiel du programme et surtout, on y reviendra quand on aura un outil plus puissant pour les calculer : les développements limités*).

1) et 2) Il n'y a pas de forme indéterminée. Les deux limites valent 0.

3) Multiplier au numérateur et au dénominateur par $x+2$, faire un changement de variable $y = x(x+2)$ afin de se ramener à une limite du type $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}$. Limite obtenue : 2.

5) Une façon de procéder : utiliser la relation $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ puis observer une identité remarquable au numérateur. Limite obtenue : 2.

7) Écrire $(\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = \exp(g(x))$, où $g(x) = \frac{1}{\ln(x)} \ln(\ln(1+x))$. Écrire $\ln(1+x) = \ln(\frac{\ln(1+x)}{x} x)$. Remplacer dans $\ln(\ln(1+x))$, « casser » le logarithme puis utiliser $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. On obtient $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ donc $\lim_{x\to 0} \exp(g(x)) = e$.

12) Soit $f(x)$ la fonction de l'énoncé.

Si $\alpha > 4$: nous allons démontrer que la limite n'existe pas. Pour cela, il suffit de construire deux suites de réels x_n et y_n ($n \in \mathbb{N}$) strictement croissantes telles que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l_1$, $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = l_2$ et $l_1 \neq l_2$. Prenons $x_n = n\pi$. Alors $\sin(x_n) = 0$ donc $f(x_n) = (n\pi)^4$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty = l_1$. Prenons ensuite $y_n = \pi/2 + n\pi$, de sorte que $\sin(y_n) = 1$. Alors $f(y_n) = \frac{y_n^4}{1+y_n^\alpha} = \frac{1}{y_n^{\alpha-4} + y_n^{-4}}$. Comme $y_n \to +\infty$ et $\alpha > 4$, on en déduit $l_2 = 0$.

Si $\alpha = 4$, en utilisant les mêmes suites x_n et y_n, on montre que la fonction n'a pas de limite en $+\infty$.

Supposons $\alpha < 4$. On écrit $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-4}\sin(x)^2 + 1/x^4}$. Le dénominateur tend vers 0^+ car $\alpha < 4$ et $\sin(x)^2$ est bornée par 1. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 7. Quelques résultats, sans démonstrations.

7) La fonction $f : x \mapsto |x|^n$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais dérivable uniquement sur $\mathbb{R}^*$. Donc *a priori*, on peut dire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Examinons ce qui se passe en 0. Il n'est pas difficile de constater que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et vaut 0, donc f est également dérivable en 0. Un calcul montre que sa dérivée est :

$$f'(x) = \begin{cases} n|x|^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ -n|x|^{n-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

8) La fonction est définie sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$. Sa dérivée est : $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

9) La fonction est définie sur $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Sa dérivée est $\frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Exercice 10.

1) Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables ; sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est dérivable car elle est nulle. Étudions donc la dérivabilité en 0.
   On a
$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \begin{cases} \frac{e^{1/t}}{t} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$
   Or $\frac{e^{1/t}}{t}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et comme ces dérivées sont identiques, f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
2) Il s'agit de voir si f est deux fois dérivable en 0, c'est-à-dire si f' est dérivable en 0. On a
$$f'(t) = \begin{cases} -\frac{e^{1/t}}{t^2} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
   donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est
$$\frac{f'(t)-f'(0)}{t-0} = \begin{cases} -\frac{e^{1/t}}{t^3} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
   et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0 et $f''(0)=0$.
3) (a) On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{\frac{1}{t}}/t^2$, donc $f'(t) = e^{\frac{1}{t}}P_1(t)/t^2$ si on pose $P_1(t) = -1$. Par ailleurs, $f''(t) = e^{\frac{1}{t}}/t^4 + e^{\frac{1}{t}}(-2/t^3) = \frac{1-2t}{t^4}e^{\frac{1}{t}}$ donc la formule est vraie pour $n=2$ en posant $P_2(t) = 1-2t$.
   (b) Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{\frac{1}{t}}$ d'où
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{\frac{1}{t}} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{\frac{1}{t}}(-\frac{1}{t^2}) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$
   donc la formule est vraie au rang $n+1$ avec $P_{n+1}(t) = P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)$. Connaissant $P_1 = -1$, cette formule définit pour tout $n \geq 1$ un polynôme P_n satisfaisant la propriété demandée.

Exercice 11.

1) Comme $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$, on a $|f(x)| \leq x^2$ donc $f(x)$ tend vers 0 quand $x \to 0$ (théorème d'encadrement). En posant $f(0)=0$, on prolonge la fonction f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la dérivabilité en 0. Le taux d'accroissement de f en 0 est
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\frac{1}{x}.$$
   Comme ci-dessus, il y a une limite (qui vaut 0) en $x=0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
3) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. On a $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ (prendre la valeur absolue et la majorer par x). Si $f'(x)$ avait une limite l en 0, on aurait $l = \lim_{x\to 0} -\cos(1/x)$; mais c'est impossible, car on sait que le cosinus n'a pas de limite à l'infini. Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.
   Remarque : si une fonction est dérivable en a, elle est continue en a ; mais si elle est continue en a, elle n'est pas forcément dérivable en a. La fonction de l'exercice en est un contre-exemple.

Exercice 13.

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{'}(x) = \frac{(x^3)^{'}(1+x^2) - x^3(1+x^2)^{'}}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2(1+x^2)-2x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en $x = 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle y est dérivable) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Par définition, sa réciproque est définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2) Le calcul mené à la question 1 montre que la dérivée de f s'annule uniquement en $x = 0$. Donc la réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et sa représentation graphique admet une tangente verticale au point d'abscisse $f(0) = 0$.