Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Rappel. La notation $\sin^n(x)$ désigne $(\sin(x))^n$ (idem pour $\cos^n(x)$, etc.).

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{\ln(1+\sin(x))} \qquad x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{\cos(x)} \qquad x \mapsto \sqrt{\sin(2x)}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) \quad \cos(3x) = \frac{1}{2} \qquad\qquad (E_2) \quad \cos^2 x = \sin^2 x.$$

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont périodiques et déterminer leur période :

$$f : x \mapsto e^{\sin(x/2)} \qquad g : x \mapsto \sin^3(x) + \sin(3x) + 1$$

(pour la deuxième, on peut utiliser la formule trigonométrique : $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$).

Exercice 4. 1) Prouver l'inégalité : pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \sin x \leq x \leq \tan x$.

2) En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Exercice 5. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}} - 2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\frac{1}{x}) + e^{\frac{1}{x^2}+x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(x+2))}{x}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ 5) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ 6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$

7) $\lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$ 8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$ 9) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$

10) $\lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x})$ où E désigne la fonction partie entière

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ en fonction de m et n entiers positifs

12) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2(x)}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1) $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$	2) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$	3) $x \mapsto e^{x\ln x}$
4) $x \mapsto x^2+2^x$	5) $x \mapsto x^x$	6) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2}\right)$
7) $x \mapsto \lvert x\rvert^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	8) $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	9) $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
10) $x \mapsto \ln\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert$	11) $x \mapsto \ln\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert$	12) $x \mapsto \tan(x)+\frac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x - \dfrac{2x\ln x}{x-1}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
3) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
4) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
5) En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 9. Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2(x)$$

(on peut commencer par calculer les premières dérivées afin de deviner la formule générale, puis la démontrer par récurrence sur n).

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2) Étudier l'existence de $f''(0)$.
3) On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$. Conclure.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 12. Déterminer les constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1) Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} et donner son domaine de définition.
2) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur son domaine de définition.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, expliciter f'.
2) Dresser le tableau de variations de f, limites incluses, et tracer dans un repère orthonormé le graphe $\mathcal{C}_f$ de f.
3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter. Sa réciproque sera notée f^{-1} et son graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.
4) En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
5) Calculer $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$.
6) Donner l'équation des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 0.
7) Soit $x \in f(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $f(x) = y$. En déduire f^{-1}.
8) Lorsque f^{-1} est dérivable en x, calculer $(f^{-1})'(x)$ de deux façons différentes.
9) Tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie pour tout x dans $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1) Étudier les variations de f.
2) En déduire que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
3) En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
4) Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$. En déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5) Tracer dans un même repère orthonormé le graphe de f et celui de f^{-1}.