Quelques corrections pour la feuille n^o 3

Rappel : composition de développements limités. Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a pour f et en b pour g. Notons-les ainsi :

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

$$g(y) = Q(y-b) + (y-b)^n \varepsilon(y-b).$$

($P(x-a)$ et $Q(y-b)$ sont des polynômes en $x-a$, resp. $y-b$). **Si** $b = f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ admet un développement limité en a à l'ordre n qui se calcule de la façon suivante :

1) On fait « $y = P(x-a)$ » dans $Q(y-b)$ c'est-à-dire on calcule $Q(P(x-a)-b)$
2) On ne garde que les termes en $(x-a)^k$ avec $k \leq n$. On obtient ainsi un polynôme en $x-a$ qu'on note $R(x-a)$.
3) Le développement de $g \circ f$ à l'ordre n est alors : $R(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$.

Un exemple détaillé : le développement limité de $e^{\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 2.

C'est $(g \circ f)(x)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $g : y \mapsto e^y$. On connaît des formules pour les D.L. de f en 0 et g en 0 à l'ordre 2. Mais *attention* ! $f(0) = 1 \neq 0$. Pour appliquer la méthode, il faut donc utiliser le développement limité de e^y en 1 à l'ordre 2. Commençons par l'établir.

$$e^y = e^{1+(y-1)} = e \cdot e^{y-1}$$

Quand y est au voisinage de 1, $y-1$ est au voisinage de 0 donc on peut utiliser la formule bien connue : $e^{y-1} = 1 + (y-1) + \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1)^2\varepsilon(y-1)$. Donc au voisinage de 1,

$$e^y = e + e(y-1) + e\frac{(y-1)^2}{2} + (y-1)^2\varepsilon(y-1).$$

Avec les notations précédentes, on a donc $Q(y-1) = e + e(y-1) + e\frac{(y-1)^2}{2}$. Par ailleurs, à l'ordre 2, on a $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$. Avec les notations précédentes, $P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$. Maintenant on fait $y = P(x)$ dans $Q(y-1)$:

$$Q(P(x)-1) = e + e(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - 1) + \frac{e}{2}(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - 1)^2.$$

En développant et en ne gardant que les termes de degré ≤ 2, il reste $R(x) = e + \frac{e}{2}x$. Le développement limité de $e^{\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 2 est donc : $e + \frac{e}{2}x + x^2\varepsilon(x)$.

Remarque : il est inutile de détailler autant la rédaction sur une copie. Il faut par contre indiquer les étapes intermédiaires des calculs.

Exercice 2. Quelques indications.

3) La fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ est une fonction composée. Remarquons que $\sin(0) = 0$. On développe $\sin(x)$ et $\sqrt{1+y}$ en 0 à l'ordre 3. On a : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + y^3\varepsilon(y)$. En composant les deux parties principales et en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3, on obtient : $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6}) - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$. D'où $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

4) On développe $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3 et $\ln(1+y)$ en 0 à l'ordre 3. En composant les parties principales et en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3, on obtient $\ln(1+\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

5) On utilise le développement de $\frac{1}{1+y}$ en 0 à l'ordre 3, que l'on applique à $y = x + x^2$. En ne gardant que les termes d'ordre ≤ 3, on obtient $\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

6) Le développement de $\sin(x)$ commence par x, donc se factorise par x. En remplaçant dans $\frac{x}{\sin(x)}$, obtiendra quelque chose de la forme : $\frac{1}{1+a(x)}$, dont on souhaite calculer le développement à l'ordre 3. Comme $a(x) \to 0$ quand $x \to 0$, il faut calculer le développement de $1 + a(x)$ à l'ordre 3 puis utiliser le développement de $\frac{1}{1+y}$ à l'ordre 3 en 0. Pour cela, il faut obtenir $a(x)$ à l'ordre 3 c'est-à-dire $\sin(x)$ à l'ordre 4.

On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$. Donc $\frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+x^3\varepsilon(x)}$ ce qui donne, après calculs, $\frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

7) Soit on se rappelle les premiers termes du développement de tan, soit on les redémontre. Pour cela, on peut utiliser $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Il faut développer $\sin(x)$ et $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4. Pour développer $\frac{1}{\cos(x)}$, comme le développement de $\cos(x)$ commence par 1, on développe cos à l'ordre 4 puis on utilise le développement limité de $\frac{1}{1+y}$ à l'ordre 4. Après calculs, on obtient $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$.

8) On développe $\sin(x)$ et e^y en 0 à l'ordre 4, puis on compose les deux développements en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 4. On obtient $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$.

9) On calcule le développement de $\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2 puis on le compose avec lui-même. Cela donne $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)} = \sqrt{2}(1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + x^2\varepsilon(x))$.

10) Pour avoir $\frac{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}{x^2}$ à l'ordre 2, il faut développer le numérateur à l'ordre 4. En particulier, il faut développer $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. Il faut également développer e^{x^2} à l'ordre 4 ; pour cela, on utilise le développement de e^y à l'ordre 2. Après calculs, on obtient $\frac{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}{x^2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

11) Il faut développer le numérateur à l'ordre 3. On rappelle que $\sqrt[3]{x}$ désigne $x^{1/3}$. En utilisant le développement limité de $(1+y)^\alpha$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, on obtient après calculs : $\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x} = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{13}{6}x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

12) Par définition, $(x+1)^{x^2+2x} = e^{(x^2+2x)\ln(x+1)}$. On va donc devoir développer $(x^2+2x)\ln(x+1)$ à l'ordre 6, c'est-à-dire $\ln(x+1)$ à l'ordre 5. Cela donne $(x^2+2x)\ln(x+1) = 2x^2+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5+\frac{3}{20}x^6+x^6\varepsilon(x)$. En composant avec le développement de e^y à l'ordre 3 (cela suffit car le développement précédent se factorise par x^2)), on obtient $e^{(x^2+2x)\ln(x+1)} = 1 + 2x^2 + \frac{13}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{109}{60}x^6 + x^6\varepsilon(x)$.

Exercice 3. Quelques indications.

3) On écrit $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. On se ramène ainsi au développement de $\cos(y)$ quand y est au voisinage de 0 à l'ordre 5, avec $y = x - \frac{\pi}{2}$. On obtient $\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 + (x - \frac{\pi}{2})^5\varepsilon(x - \frac{\pi}{2})$.

4) Le développement du numérateur au voisinage de 2 est $1 + x = 3 + (x - 2)$. On développe le dénominateur au voisinage de 2 à l'ordre 2. Pour cela, on écrit : $\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{1+(x-2)}$ et on utilise le développement de $\frac{1}{1+y}$ à l'ordre 2 pour y au voisinage de 0. On obtient $\frac{1+x}{1-x} = -3 + 2(x - 2) - 2(x - 2)^2 + (x - 2)^2\varepsilon(x)$.

Exercice 6.

3) Limite obtenue : $\frac{1}{3}$.

5) Limite obtenue : $-\frac{1}{3}$.

7) Limite obtenue : $-\sqrt{3}$.

Quelques indications pour $\lim_{x\to+\infty}(2x+3-\sqrt[4]{2+80x^3+16x^4})$. On fait le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ pour se ramener à $y \to 0^+$. Alors

$$f(x) = \frac{2}{y} + 3 - \left(2 + \frac{80}{y^3} + \frac{16}{y^4}\right)^{1/4} = \frac{2}{y} + 3 - \frac{1}{y}\left(2y^4 + 80y + 16\right)^{1/4} = \frac{2}{y} + 3 - \frac{2}{y}\left(1 + 5y + \frac{1}{8}y^4\right)^{1/4}$$

$$= \frac{2}{y} + 3 - \frac{2}{y}\left(1 + \frac{5}{4}y + y\varepsilon(y)\right) = \frac{1}{2} + \varepsilon(y)$$

donc la limite, quand y tend vers 0, est $\frac{1}{2}$.

Exercice 7. On trouve $a = 1$, $b = 0$ et $c = \frac{1}{2}$.

Exercice 9. Le D.L. demandé est : $-\frac{1}{6}-\frac{1}{180}x^2-\frac{1}{2835}x^4+x^4\varepsilon(x)$. La fonction est donc prolongeable par continuité en 0, puisque sa limite en 0 est $-\frac{1}{6}$.

Exercice 10.

2) On développe $g(x)=\ln\left(\frac{1-x}{x-3}\right)$ en 2 à l'ordre au moins 2, afin d'avoir l'équation de la tangente ainsi que sa position. En faisant une première fois le calcul, on s'aperçoit que le terme de degré 2 dans le développement est nul ; on est donc obligés de pousser le développement au moins à l'ordre 3 pour obtenir la position. Prenons $\frac{x-1}{3-x}$. Le développement du numérateur est $x-1=1+(x-2)$; celui du dénominateur se calcule en écrivant $3-x=1-(x-2)$ et en utilisant le développement de $\frac{1}{1-y}$ pour y au voisinage de 0. On obtient $\frac{x-1}{3-x}=1+2(x-2)+2(x-2)^2+2(x-2)^3+(x-2)^3\varepsilon(x-2)$. En composant avec le développement de $\ln(1+y)$ à l'ordre 3 (y au voisinage de 0), on obtient après calculs : $g(x)=2(x-2)+\frac{2}{3}(x-2)^3+(x-2)^3\varepsilon(x-2)$. La tangente à la courbe en $x=2$ a donc pour équation $X=2(x-2)$. Le premier terme suivant non nul dans le développement est $\frac{2}{3}(x-2)^3$, qui a le même signe que $x-2$. Donc à gauche de $x=2$, la courbe est en-dessous de la tangente et elle est au-dessus à droite.

Exercice 11.

2) La fonction $f : x\mapsto\frac{2x^2}{x-1}e^{\frac{1}{2x}}$ est définie sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$. Pour déterminer les asymptotes éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$, on fait le changement de variable $y=\frac{1}{x}$, de sorte que $f(x)=\frac{2e^{y/2}}{y-y^2}$ et on calcule un développement limité « généralisé » (on dit aussi asymptotique) de cette fonction quand y est au voisinage de 0. On écrit $g(y)=\frac{2e^{y/2}}{y-y^2}=\frac{2}{y}\frac{e^{y/2}}{1-y}$ et on effectue le développement limité de la deuxième fraction au voisinage de 0. On souhaite trouver l'équation de la tangente et sa position, donc il faudra faire un développement à l'ordre 2 au moins. L'ordre 2 suffit et donne $g(y)=1+\frac{3}{2}y+\frac{13}{8}y^2+y^2\varepsilon(y)$ d'où $f(x)=2x+3+\frac{13}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$. Ceci montre que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(2x+3))=0$. La courbe représentative de f a donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $X=2x+3$. Le premier terme non nul suivant dans le développement est $\frac{13}{4}\frac{1}{x}$ et il est du signe de x. Donc au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de la droite et au voisinage de $-\infty$, elle est en-dessous.