Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Feuille d'exercices n° 3

Calculs de développements limités.

Exercice 1 (rappel de cours)**.** Soient f et g deux fonctions continues dont on suppose qu'elles admettent un développement limité à tout ordre.

1) Jusqu'à quel ordre faut-il développer f et g pour calculer le développement limité de $f+g$ à l'ordre n ? Expliquer comment obtenir le développement de $f+g$ à partir de ceux de f et g.
2) Même question pour fg et pour $f \circ g$.

Exercice 2. Calculer les développements limités suivants en 0.

1) $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3 — 2) $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3
3) $\sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3 — 4) $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3
5) $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 3 — 6) $\frac{x}{\sin(x)}$ à l'ordre 3
7) $\tan(x)$ à l'ordre 4 — 8) $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4
9) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 — 10) $\frac{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}{x^2}$ à l'ordre 2
11) $\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x}$ à l'ordre 2 — 12) $(x+1)^{x^2+2x}$ à l'ordre 6

Exercice 3. Calculer les développements limités suivants.

1) e^x au voisinage de a à l'ordre 3 — 2) $\cos(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4
3) $\sin(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 5 — 4) $\frac{1+x}{1-x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 2

Exercice 4. 1) Démontrer que la fonction tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

2) On appelle arctangente et on note arctan sa fonction réciproque. Sur quel ensemble est-elle dérivable ? Démontrer que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3) En déduire par intégration le développement limité de arctan au voisinage de 0 à l'ordre 10.

Exercice 5. Soit $f(x) = (1-\cos(x))^{13}$. À quel ordre minimum doit-on développer $\cos x$ pour calculer le développement limité à l'ordre 30 de $f(x)$? (on ne demande pas d'écrire ce développement limité).

Application au calcul de limites

Exercice 6. En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ — 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)}$
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}$ — 4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^3}$
5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)$ — 6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$
7) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/3} \frac{\sin 3x}{1-2\cos(x)}$ — $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (2x+3-\sqrt[4]{2+80x^3+16x^4})$

Exercice 7. Déterminer les constantes a, b, c pour que $\displaystyle\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x}$ et $\displaystyle\frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}$ tendent vers une limite finie quand $x \to 0$.

Application au prolongement par continuité

Exercice 8. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3}$. Montrer qu'elle est prolongeable en fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note h cette fonction. Que vaut $h(0)$? La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 9. On considère la fonction définie pour $x \in]0, \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{x^2}.$$

Déterminer le développement limité de $\ln(\frac{\sin(x)}{x})$ en 0 à l'ordre 4. En déduire si la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

Application à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, à l'aide d'un développement limité, trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse indiqué, puis, au voisinage du point de contact, donner la position du graphe par rapport à cette tangente. Enfin, représenter le graphe de la fonction et sa tangente au voisinage du point de contact.
1) $f(x) = \ln(\sin(x))$ en $x = \frac{\pi}{2}$ 2) $g(x) = \ln(\frac{1-x}{x-3})$ en $x = 2$.

Exercice 11. En utilisant des développements limités, trouver, pour chacune des fonctions suivantes, ses asymptotes en l'infini et préciser leur position (il peut s'agir de droites ou de paraboles).
1) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ 2) $\dfrac{2x^2}{x-1}e^{\frac{1}{2x}}$ 3) $\sqrt[3]{x^3+ax^2} - \sqrt[2]{x^2+bx}$
4) $x^3\sin(\frac{1}{x})$ 5) $x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Développements limités de fonctions réciproques.

Exercice 12. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1) Montrer que f est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$.
2) Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
3) On note g la fonction réciproque de f. Montrer que g possède un développement limité à l'ordre 2 au point 1 et calculer ce développement limité.
4) En déduire que le produit $t \cdot g(\frac{t}{t-1})$ a une limite finie, que l'on calculera, quand t tend vers $+\infty$.