**Quelques corrections pour la feuille d'exercices n$^{o}$ 4**

---

**Exercice 2.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 \leqslant |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1,1]$ donc $f$ est minorée ($-1$ est un minorant), majorée ($1$ est un majorant) et $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leqslant 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geqslant 1$. Conclusion :

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$

**Exercice 5.**

1) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et

$$f'(x) = 2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x.$$

2) On a $f(0) = f(\pi) = 0$. De plus, la fonction $f$ est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$). Par le théorème de Rolle il existe $x \in ]0, \pi[$ tel que $f'(x) = 0$, d'où la conclusion.

**Exercice 6.** Démontrons le résultat par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.

Pour $n = 1$ : soit $f$ une fonction dérivable sur $]a, b[$ et qui s'annule en deux points $x_1$ et $x_2$ de $]a, b[$. La fonction $f$ est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$ : en effet, elle est dérivable sur $]a, b[$ et $[x_1, x_2] \subset ]a, b[$. Comme $f(x_1) = f(x_2)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in ]x_1, x_2[$ tel que $f'(x_0) = 0$. En particulier, $x_0$ appartient à $]a, b[$.

Supposons le résultat vrai au rang $n$ et démontrons-le au rang $n + 1$. Soit $f$ une fonction $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et qui s'annule en $x_1, \ldots, x_{n+2}$ ($n + 2$ points distincts de $]a, b[$). On a $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{n+2})$. Appliquons le théorème de Rolle à $f$ sur chacun des intervalles $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n+1}, x_{n+2}]$. On peut le faire car $f$ est continue sur chacun de $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ (elle est dérivable sur $]a, b[$). Il existe donc $n + 1$ points $y_1 \in ]x_1, x_2[, \ldots, y_{n+1} \in ]x_{n+1}, x_{n+2}[$ tels que $f'(y_1) = f'(y_2) = \ldots = f'(y_{n+1}) = 0$. Posons $g = f'$. Par hypothèse sur $f$, $g$ est une fonction $n$ fois dérivable sur $]a, b[$. Elle s'annule en $n + 1$ points de $]a, b[$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $g$ au rang $n$, on obtient un nombre $x_0 \in ]a, b[$ tel que $g^{(n)}(x_0) = 0$, ce qui signifie $f^{(n+1)}(x_0) = 0$. L'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$ est démontrée. La propriété est donc vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

*Remarque :* l'hypothèse de l'énoncé « $f^{(n)}$ est continue sur $]a, b[$ » semble être inutile.

**Exercice 7.** On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[k, k + 1]$ pour $k \in \mathbb{N}*$ (cette fonction est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$). Il existe un $c_k \in ]k, k + 1[$ tel que

$$\ln(k + 1) - \ln(k) = \frac{1}{c_k}(k + 1 - k) = \frac{1}{c_k}$$

Or $c_k \geqslant k$ donc $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{c_k}$. En sommant cette inégalité pour $k$ de 1 à $n$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k + 1) - \ln(k) = \ln(n + 1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est « téléscopique ». Donc $S_n \geqslant \ln(n+1)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

**Exercice 8.** Soit $f(x) = x^\alpha$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ de dérivée $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$. On applique le théorème des accroissements finis à $f$ sur $[n, n+1]$ et on utilise la décroissance de $f'$ pour obtenir : $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.

Posons $\beta = 1 - \alpha$. On a alors $\beta \in ]0, 1[$, donc en appliquant les inégalités précédentes à $\beta$ et en les sommant entre $n = 1$ et $n = N$, on obtient :

$$\beta \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^{1-\beta}} \leqslant (N+1)^\beta - 1 \leqslant \beta \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\beta}}.$$

On a $\beta > 0$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)^\beta - 1 = +\infty$. Comme $1 - \beta = \alpha$, on en déduit $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

**Exercice 9.**

1) Cherchons $P(x)$ sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$. On a $f(x) = \ln(1+x) - ax^2 - bx - c$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2ax - b$ et $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - 2a$. Les trois conditions de l'énoncé deviennent donc : $c = 0, 1 - b = 0, -1 - 2a = 0$ ce qui donne $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 0$. Donc $P(x) = -\frac{x^2}{2} + x$.

2) (a) On a $f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$. Comme $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, on a $\frac{2}{3} < \frac{1}{x+1} < 2$, donc $\frac{1}{|x+1|} \leqslant 2$. Alors

$$|f'(x)| = \frac{x^2}{|x+1|} \leqslant 2x^2.$$

(b) Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \ln(1+x) - P(x)$ sur le segment $[0, x]$ avec $0 < x < \frac{1}{2}$. La fonction $f$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Il existe donc un réel $c_x \in ]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0) = f'(c_x)x$$

D'après la question a), on a alors

$$|\ln(1+x) - P(x)| = |f(x)| = |f'(c_x)x| \leqslant 2x^2|x| = 2|x^3|.$$

(c) Comme $|\ln(1+x) + \frac{1}{2}x^2 - x| \leqslant 2|x^3|$, on obtient pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}\right| \leqslant 2\,|x|\,.$$

Posons $g(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}$. Alors l'inégalité précédente équivaut à $-2x \leqslant g(x) \leqslant 2x$. Comme $\lim_{x\to 0} x = 0$, la théorème des gendarmes donne $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$. Une autre méthode pour calculer cette limite est d'utiliser les développements limités.

**Exercice 10.**

1) Soit $f(y) = \ln(y)$. La fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(y) = \frac{1}{y}$, qui est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x > 0$. On applique le théorème des accroissements finis sur $[x, x+1]$ ($f$ y est continue, et dérivable sur $]x, x+1[$). Il existe $c \in ]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = f'(c)$. Donc

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2) Par 1) on a $\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}} < \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln(x)) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln(x)) = 0.$$

De même, on a $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} < x(\ln(x+1) - \ln(x)) < 1$ donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x)) = 1.$$

3) On a $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) = \exp(x\ln(\frac{x+1}{x})) = \exp(x(\ln(x+1)-\ln(x)))$. Comme $x(\ln(x+1)-\ln(x))$ a pour limite 1 en $+\infty$, par continuité de la fonction exponentielle en 1, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

4) Un calcul similaire donne $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp(x(\ln(x-1)-\ln(x)))$. En appliquant les inégalités de 1) à $x-1$ (pour $x>1$), on obtient $1 < x(\ln(x)-\ln(x-1)) < \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x-1)-\ln(x)) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{e}$ car l'exponentielle est continue en $-1$.

**Exercice 11.** $Q_n(t) = (1-t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, donc si on le dérive $n$ fois, on obtient un polynôme de degré $2n-n=n$. Le polynôme $Q_n$ a pour racines $-1$ et $+1$ qui sont de multiplicité $n$, donc $Q_n(1) = Q_n'(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en $-1$. La fonction $Q_n$ est continue et dérivable $n$ fois sur $\mathbb{R}$.

Comme $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]-1,1[$ telle que $Q_n'(c) = 0$. Donc $Q_n'(-1) = 0$, $Q_n'(c) = 0$, $Q_n'(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines $d_1, d_2$ pour $Q_n''$, auxquelles il faut rajouter $-1$ et $+1$. On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle $n$ fois. Nous obtenons $n$ racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Par construction, ces racines sont réelles et distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré $n$ a au plus $n$ racines, nous avons obtenu toutes les racines.

**Exercice 12.**

1) Il suffit de montrer qu'entre deux racines de $P^{(n)}(x) - e^x = 0$ il existe toujours une racine de $P^{(n+1)}(x) - e^x = 0$. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ des racines de $P^{(n)}(x) - e^x = 0$. Posons $f(x) = P(x) - e^x$ et considérons la restriction de $f(x)$ au segment $[x_1, x_2]$. C'est une fonction continue, dérivable sur $]x_1, x_2[$ et $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Donc, par le théorème de Rolle, il existe un $y \in ]x_1, x_2[$ tel que $f'(y) = 0$. Comme $f'(x) = P^{(n+1)}(x) - e^x$, on voit que $y$ est racine de $P^{(n+1)}(x) - e^x = 0$. En faisant le même raisonnement pour les segments $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, on va trouver $(k-1)$ (autant que de segments) racines de $P^{(n+1)}(x) - e^x = 0$.

2) En dérivant $\deg P + 1$ fois l'équation $P(x) = e^x$, on obtient une équation du type $0 = e^x$, qui n'a aucune solution réelle. Donc $P^{(\deg P)}(x) = e^x$ admet au plus une solution, $P^{(\deg P-1)}(x) = e^x$ admet au plus deux solutions, etc. donc $P(x) = e^x$ admet au plus $(\deg P + 1)$ solutions, donc, un nombre fini.

**Exercice 13.** Raisonnons par l'absurde : on suppose qu'il y a (au moins) quatre racine distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre $x_1$ et $x_2$, entre $x_2$ et $x_3$,...)($P_n$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$), il existe $x_1' < x_2' < x_3'$ des racines de $P_n'$. On applique deux fois Rolle entre $x_1'$ et $x_2'$ et entre $x_2'$ et $x_3'$. On obtient deux racines distinctes pour $P_n''$. Or $P_n'' = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Nous avons obtenu une contradiction.

**Exercice 14.** Quelques indications.

1) Soit $g(t) = \ln t$. Appliquer le théorème des accroissement finis à $f$ sur $[x,y]$.

2) On obtient $f'(\alpha) = \frac{x-y+(\ln x - \ln y)(\alpha x + (1-\alpha)y)}{\alpha x + (1-\alpha)y}$. Pour trouver le signe du numérateur, poser $h(\alpha) = x - y + (\ln x - \ln y)(\alpha x + (1-\alpha)y)$. On calcule facilement $h'$ et on voit que $h'(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in [0,1]$. Donc $h$ est strictement décroissante. Par ailleurs, $h(0) = x - y + y(\ln y - \ln x)$ et les inégalités de la question 1) permettent de conclure que $h(0) > 0$. De même, on obtient $h(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $h$, il existe un $c \in [0,1]$ tel que $h(c) = 0$. Pour $\alpha \leqslant c$, $f'$ est positive et $f$ est croissante ; pour $\alpha \geqslant c$, $f'$ est négative et $f$ est décroissante. Maintenant, on calcule $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Donc, d'après le tableau des variations, $f(\alpha) \leqslant 0$ pour tout $\alpha \in [0,1]$, ce qui donne l'inégalité demandée.

3) Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est *concave*, c'est-à-dire que la corde (le segment qui relie les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$) est toujours située sous la courbe d'équation $y = f(x)$.