Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

Premier semestre 2007/08
PCME12

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0,2]$ par $F(x) = 3x^4 - 4ax^3$.

1) On suppose que la fonction F possède un extremum (maximum ou minimum) en un point c de l'intervalle $]0,1[$. Calculer c et $F(c)$.
2) Quelles sont, en fonction de a, les valeurs possibles pour pour le maximum et le minimum de la fonction F sur l'intervalle $[0,1]$?
3) Déterminer, en fonction de a, l'image $F([0,1])$ de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction F.

Exercice 2. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 3. 1) Soit l'équation $2x\sqrt{x^2+1} = x+1$. Montrer l'existence d'une solution dans $[0,1]$.

2) Soit l'équation $2\cos(x) = x$.
   (a) Montrer que les solutions, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.
   (b) Montrer l'existence d'au moins une solution.

Exercice 4. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe dans $[a,b]$ c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$ (on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie).

Exercice 5. Soit f définie par $f(x) = (x^2+1)\sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Calculer la dérivée de f.
2) Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0,\pi]$.

Exercice 6. Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ et s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue sur $]a,b[$, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 7. Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[k,k+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 8. Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Exercice 9. 1) Déterminer une fonction polynomiale de degré 2, P, telle que, si on définit sur $]-1,1[$ une fonction f par : $f(x) = \ln(1+x) - P(x)$, alors $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

2) (a) Montrer que : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, |f'(x)| \leqslant 2x^2$.

(b) En déduire que : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, |\ln(1+x) - P(x)| \leqslant 2|x|^3$.

(c) En déduire si elle existe la valeur de : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Quelle autre méthode (plus rapide) connaissez-vous pour calculer cette limite ?

Exercice 10. 1) A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

3) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 11. Montrer que le polynôme P_n défini par $P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$ est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Indication : on rappelle que si P est un polynôme ayant une racine a de multiplicité m, alors $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

Exercice 12. Soit P un polynôme à coefficients réels. On veut montrer que l'équation l'équation $P(x) = e^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, n'admet qu'un nombre fini de solutions.

1) Montrer que si n et $k \geqslant 1$ sont deux entiers naturels, si l'équation $P^{(n)}(x) = e^x$ a au moins k solutions, alors l'équation $P^{(n+1)}(x) = e^x$ a au moins $k-1$ solutions.
2) En déduire que l'équation $P(x) = e^x$ a au plus $\deg P + 1$ solutions. Conclure.

Exercice 13. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 14. Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1) Montrer que

$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y \leqslant \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 15. On pose $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.

1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 9 et au point 0 pour la fonction sinus. En déduire, pour tout $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$P(x) \leqslant \sin(x) \leqslant P(x) + \frac{x^9}{9!}.$$

2) Trouver un nombre $a > 0$ tel que l'on ait $|\sin(x) - P(x)| \leqslant 10^{-5}$ pour tout $x \in [0, a]$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.

1) Étudier les variations de la fonction f. Quelle est l'image de l'intervalle $]0, +\infty[$ par f ?
2) Vérifier que $f''(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$.
3) Soit $a > 1$ un nombre réel. En écrivant la formule de Taylor-Lagrange avec un reste en f'' sur l'intervalle $[1, a]$, trouver une minoration de $f(a)$.