Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

Premier semestre 2007/08
PCME12

Quelques corrections pour la feuille d'exercices n^{o} 5
PREMIÈRE PARTIE

Il s'agit de la deuxième version de cette feuille. Quelques erreurs ont été corrigées par rapport à la première.

Exercice 1. Les domaines de définition des cinq premières fonctions ont été vus en TD.

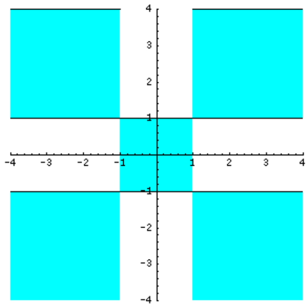
$f_6(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$. Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f_6 est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $f_6(x,y)$ soit bien défini, c'est-à-dire tels que $(1-x^2)(1-y^2) \geqslant 0$. Cette condition équivaut à :

$$(1-x^2 \geqslant 0 \text{ et } 1-y^2 \geqslant 0) \text{ ou } (1-x^2 \leqslant 0 \text{ et } 1-y^2 \leqslant 0)$$

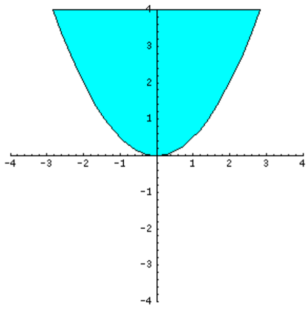
c'est-à-dire : $(x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1])$ ou $(x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et $y \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$.

En d'autres termes, $\mathcal{D}$ est la réunion des cinq parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D}_1 = [-1,1]\times[-1,1] & \mathcal{D}_2 =]-\infty,-1]\times]-\infty,-1] \\ \mathcal{D}_3 =]-\infty,-1]\times[1,+\infty[& \mathcal{D}_4 = [1,+\infty[\times]-\infty,-1] \\ \mathcal{D}_5 = [1,+\infty[\times[1,+\infty[& \end{array}$$

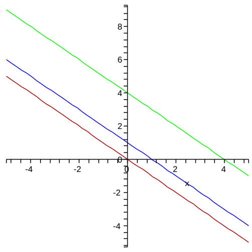


$f_7(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2y-x^2}}$. Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f_6 est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $f_7(x,y)$ soit bien défini. Comme $y^2 \geqslant 0$, c'est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $2y - x^2 > 0$. Le « bord » du domaine est déterminé par l'équation $2y = x^2$, c'est-à-dire $y = \frac{x^2}{2}$. C'est l'équation d'une parabole de sommet $(0,0)$. Le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du plan situés strictement au-dessus de cette parabole.

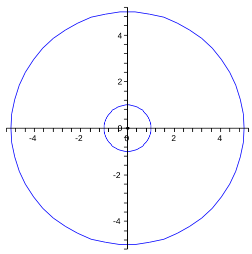


Lignes de niveau.

Soit $c \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour (x,y) dans le domaine de définition de f_1, l'équation $f_1(x,y) = \sqrt{x+y} = c$ équivaut à $x + y = c^2$ c'est-à-dire$y = c^2 - x$. C'est l'équation cartésienne d'une droite dans le plan. Les lignes de niveau 0, 1 et 2 sont les droites d'équation $y = -x$, $y = 1-x$, $y = 4-x$. Remarquons que ces droites sont parallèles (elles ont le même coefficient directeur).



Pour (x,y) dans le domaine de définition de f_3, l'équation $f_3(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}=c$ équivaut à $x^2+y^2-1=c^2$ c'est-à-dire $x^2+y^2=c^2+1$. C'est l'équation cartésienne du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{c^2+1}$. **Rappel :** l'équation cartésienne du cercle de centre le point de coordonnées (a,b) et de rayon $R>0$ est $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

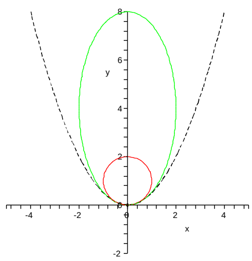


Pour (x,y) dans le domaine de définition de f_7, l'équation $f_7(x,y)=\sqrt{\frac{y^2}{2y-x^2}}=c$ équivaut à $\frac{y^2}{2y-x^2}=c^2$ c'est-à-dire $c^2x^2+y^2-2yc^2=0$. On peut l'écrire encore $c^2x^2+(y-c^2)^2-c^4=0$ c'est-à-dire $c^2x^2+(y-c^2)^2=c^4$.

Si $c=0$, cela équivaut à $y=0$ (donc $x=0$, puisque (x,y) est dans le domaine de f_7) donc la ligne de niveau 0 est le point $(0,0)$.

Si $c=1$, cela donne $x^2+(y-1)^2=1$ qui est l'équation du cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1.

Si $c=2$, cela donne $4x^2+(y-4)^2=16$. On peut l'écrire $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$. C'est l'équation de l'ellipse de centre $(0,4)$, de grand axe parallèle à l'axe des ordonnées, de demi-grand axe 4 et de demi-petit axe 2.



Exercice 3.

1) $f(x,y)=xy$. Voir la feuille d'instructions pour la feuille 5.
2) $f(x,y)=\arctan(x-3y^2)$. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\arctan(x-3y^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; de même pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\mapsto\arctan(x-3y^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc

la fonction f a des dérivées partielles en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Calculons ces dérivées. On rappelle que $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. On a, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\frac{\partial(x-3y^2)}{\partial x}(x,y)}{1+(x-3y^2)^2}=\frac{1}{1+(x-3y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\frac{\partial(x-3y^2)}{\partial y}(x,y)}{1+(x-3y^2)^2}=\frac{-6y}{1+(x-3y^2)^2}$$

3) $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$. Les fonctions exponentielle et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$, donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$. Comme les fonctions exp et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto e^{xy}\sin(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; de même pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $ye^{xy}\sin(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f a des dérivées partielles en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En utilisant la formule pour la dérivée d'un produit de fonctions,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=ye^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)=e^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y))$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xe^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)=e^{xy}(x\sin(x+y)+\cos(x+y))$$

4) $f(x,y)=x^y=e^{y\ln(x)}$. Le domaine de définition de f est l'ensemble D des $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $x>0$. Pour tout y dans $\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto e^{y\ln(x)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme composée de fonctions dérivables). De même, pour tout $x>0$, la fonction $y\mapsto e^{y\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f a des dérivées partielles en tout point (x,y) de D. De plus, par le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial(y\ln(x))}{\partial x}e^{y\ln(x)}=\frac{y}{x}e^{y\ln(x)}=\frac{y}{x}x^y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial(y\ln(x))}{\partial y}e^{y\ln(x)}=\ln(x)e^{y\ln(x)}=\ln(x)x^y.$$

Exercice 8.

1) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$, $a=(1,2)$. La fonction f est définie sur $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Elle est continue et dérivable sur D comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. En particulier, f est dérivable en (a,b). On a

$$\begin{aligned}&f(1,2)=\tfrac{5}{2}\\ &\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\tfrac{2x\cdot xy-(x^2+y^2)y}{x^2y^2}=\tfrac{x^2y-y^3}{x^2y^2}=\tfrac{x^2-y^2}{x^2y} \quad \tfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-\tfrac{3}{2}\\ &\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\tfrac{2y\cdot xy-(x^2+y^2)x}{x^2y^2}=\tfrac{y^2x-x^3}{x^2y^2}=\tfrac{y^2-x^2}{xy^2} \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Donc l'équation du plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ est : $z=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{4}(y-2)$.

Rappel : vecteur normal à un plan P. Par définition, c'est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P. Si le plan P a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors un vecteur normal à P est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Ici, un vecteur normal à P est $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\\ -1\end{pmatrix}$.

2) $f(x,y)=e^xy$, $a=(-1,1)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^2$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, f est dérivable en $(-1,1)$. On a

$$\begin{aligned}&f(-1,1)=e^{-1}\\ &\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^xy \quad \tfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=e^{-1}\\ &\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^x \quad \tfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=e^{-1}\end{aligned}$$

Donc l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ est : $z = e^{-1} + e^{-1}(x+1) + e^{-1}(y-1)$. Un vecteur normal au plan est $\begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^{-1} \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^4}$, $a = (2, 1)$. La fonction f est définie en a (car $2^2 - 1^4 \geqslant 0$) et même dérivable en a comme composée de fonctions dérivables (la fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $2^2 - 1^4 = 3 > 0$). On a

$$\begin{array}{ll} f(2,1) = \sqrt{3} & \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^4}} & \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y^3}{\sqrt{x^2-y^4}} & \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}$$

(Rappel : si u est une fonction dérivable, la règle de dérivation des fonctions composées donne $(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$). Donc l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ est : $z = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) - \frac{2}{\sqrt{3}}(y-1)$. Un vecteur normal au plan est $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -1 \end{pmatrix}$.

4) $f(x, y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $a = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La fonction f est définie en a et dérivable en a (argument similaire au précédent). On a

$$\begin{array}{ll} f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 & \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x(1-y^2)}{2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \frac{x(y^2-1)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} & \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \sqrt{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y(1-x^2)}{2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \frac{y(x^2-1)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} & \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \sqrt{2}. \end{array}$$

Donc l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ est : $z = 1 + \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(y - \sqrt{2})$. Un vecteur normal au plan est $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ci-dessous : pour la troisième fonction de l'exercice, la surface (en-dessous) et le plan tangent au point (au-dessus).