Quelques corrections pour la feuille d'exercices n° 5
DEUXIÈME PARTIE

Il s'agit de la deuxième version de cette feuille. Quelques erreurs ont été corrigées par rapport à la première.

Exercice 2.

1) $f(x,y) = e^{x+y}$. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, prenons les suites de nombres réels définies par $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$. Alors la suite (x_n, y_n) tend vers $(0,0)$. Mais $f(x_n, y_n) = e^{1/n}$ tend vers $e^0 = 1 \neq 0$ quand $n \to +\infty$.

2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Montrons que la fonction f est continue en $(0,0)$. On a :

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = \frac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2} = \frac{\left|(x+y)(x^2-2xy+y^2)\right|}{x^2+y^2} = \frac{|x+y|\left|x^2-2xy+y^2\right|}{x^2+y^2}.$$

Or, pour tous nombres réels x et y, on a les inégalités (à connaître) :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

et

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

La deuxième inégalité se démontre à partir de la remarque suivante : $0 \leqslant (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$. En utilisant ces inégalités, on en déduit :

$$\left|x^2 - 2xy + y^2\right| \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 \leqslant x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2+y^2)$$

Finalement, on obtient :

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leqslant 2(|x| + |y|).$$

Soit (x_n, y_n) une suite *quelconque* de couples de nombres réels qui converge vers $(0,0)$. Cela équivaut à dire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$. Alors $|f(x_n,y_n) - f(0,0)| \leqslant 2(|x_n| + |y_n|)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n,y_n) - f(0,0)| = 0$. Ceci montre que f est continue en $(0,0)$.

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. L'inégalité triangulaire permet de montrer que :

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Malheureusement, ce n'est pas suffisant pour appliquer le théorème des gendarmes... En fait, nous allons montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$. Pour cela, il suffit de trouver *une* suite (x_n, y_n) qui converge vers $(0,0)$ et telle que $f(x_n,y_n)$ ne converge pas vers $f(0,0) = 0$ quand $n \to +\infty$.
Prenons par exemple $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = 0$. Alors $f(x_n,y_n) = \frac{1/n^2}{1/n^2} = 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 1 \neq 0$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
Remarque. Si on avait pris $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$, on aurait obtenu $f(x_n,y_n) = -1$ et on aurait pu conclure de la même façon. En fait, on a même montré plus : comme $-1 \neq 1$, il n'existe *aucune* façon de prolonger la fonction $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, par continuité en $(0,0)$.

4) $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$. En utilisant les inégalités rappelées précédemment, on a

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|xy|\,|y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)\,|y|}{2(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}|y|.$$

Posons $g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Donc si (x_n, y_n) est une suite *quelconque* qui converge vers $(0,0)$, le théorème des gendarmes montre que $g(x_n, y_n)$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. La fonction g est donc prolongeable par continuité en $(0,0)$, en posant $g(0,0) = 0$.
La fonction f est la composée des deux fonctions $(x,y) \mapsto g(x,y)$ et $z \mapsto \sin(z)$. De plus, on a $\sin(0) = 0$, g est continue en $(0,0)$ et sin est continue en 0. Donc f est continue en $(0,0)$.

5) $f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$. Des manipulations d'inégalités comme précédemment ne permettent pas ici de conclure...
Montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$. Prenons $x_n = \dfrac{1}{n^4}$ et $y_n = \dfrac{1}{n^3}$. Alors la suite (x_n, y_n) converge vers $(0,0)$. Un calcul montre $f(x_n, y_n) = \frac{n^2}{2}$, qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
Remarque. Comment faire pour trouver une telle suite ? On peut chercher une suite (x_n, y_n) de la forme $x_n = \dfrac{1}{n^a}$ et $y_n = \dfrac{1}{n^b}$ où a et b sont des entiers > 0 à déterminer. Alors $f(x_n, y_n) = \dfrac{n^{2b+5a}}{n^{8b}+n^{6a}}$. Choisissons a et b tels que $8b = 6a$. C'est le cas par exemple si $a = 3$ et $b = 4$. Alors $f(x_n, y_n) = \dfrac{n^{2b-a}}{2}$. Si $8b = 6a$, on voit facilement que $2b - a > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = +\infty$.

Exercice 4. Soit la fonction définie, pour $(x,y) \neq (0,0)$ par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

1) On a, pour tout $x \neq 0$, $\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$, donc
$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$
De même, pour tout $y \neq 0$, $\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$, donc
$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$
Finalement, $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.

2) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Alors cette limite vaut nécessairement :
$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0.$$
Pour obtenir une contradiction, il suffit de trouver des suites de réels x_n et y_n vérifiant $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq 0$. Prenons $x_n = y_n = \frac{1}{n}$; alors $f(x_n, y_n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \neq 0$. Finalement, f n'a pas de limite en $(0,0)$.
Conclusion : ce n'est pas parce qu'une fonction de deux variables possède deux limites directionnelles égales en un point (ici, suivant l'axe des x et l'axe des y) qu'elle a une limite en ce point. Plus généralement, pour montrer qu'une fonction de deux variables est continue en un point, il ne suffit *pas* de montrer qu'elle est continue « suivant l'axe des x » et « suivant l'axe des y ».

3) On pose désormais $f(0,0) = 0$. D'après ce qui précède, f n'est pas continue en $(0,0)$. Pour montrer que f a des dérivées partielles en $(0,0)$, on montre que l'application $x \mapsto f(x,0)$ est dérivable en $x = 0$ et $y \mapsto f(0,y)$ est dérivable en $y = 0$.
D'une part, $f(x,0)$ vaut $\frac{0}{x^2} = 0$ si $x \neq 0$, et 0 sinon. Donc $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $x \mapsto f(x,0)$ est dérivable, de dérivée 0.
D'autre part, $f(0,y)$ vaut $\frac{0}{y^2} = 0$ si $y \neq 0$, et 0 sinon. Donc $f(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. En particulier, $y \mapsto f(0,y)$ est dérivable, de dérivée 0.
Donc les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, et sont $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Conclusion : ce n'est pas parce qu'une fonction de deux variables possède des dérivées partielles en un point qu'elle est continue en ce point.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) On a :

$$f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{0}{x^2} = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

donc $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc l'application partielle $x \mapsto f(x,0)$ est dérivable en $x = 0$, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Un raisonnement similaire montre que f admet une dérivée partielle par rapport à y au point $(0,0)$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2) Le calcul des dérivées partielles a été effectué à la question précédente.

3) Montrons, en faisant un raisonnement par l'absurde, que f n'est pas dérivable (différentiable) en $(0,0)$. Supposons donc f dérivable en ce point. Cela signifie qu'il existe des réels A et B tels que :

$$f(x,y) = f(0,0) + Ax + By + \sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y)$$

où $\varepsilon(x,y)$ est une certaine fonction de deux variables, continue et nulle en $(0,0)$. Soit t un nombre réel quelconque.
D'une part, $f(t,t) = \frac{t}{2} = (A+B)t + \sqrt{2t^2}\varepsilon(t,t) = (A+B)t + \sqrt{2}\,|t|\,\varepsilon(t,t)$. On en déduit

$$(A+B-\frac{1}{2})t = -\sqrt{2}\,|t|\,\varepsilon(t,t).$$

Supposons maintenant $t \neq 0$ et divisons par t.

$$(A+B-\frac{1}{2}) = -\sqrt{2}\ \text{signe}(t)\ \varepsilon(t,t).$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient $A+B-\frac{1}{2} = 0$.
D'autre part, $f(t,-t) = -\frac{t}{2} = (A-B)t + \sqrt{2}\,|t|\,\varepsilon(t,-t)$. On en déduit

$$(A-B+\frac{1}{2})t = -\sqrt{2}\,|t|\,\varepsilon(t,-t)$$

d'où, en divisant par t (lorsque $t \neq 0$),

$$(A-B+\frac{1}{2}) = -\sqrt{2}\ \text{signe}(t)\ \varepsilon(t,-t).$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient $A-B+\frac{1}{2} = 0$.
En faisant la somme des deux relations, on obtient $2A = 0$ d'où $A = 0$. Mais la première relation donne alors $B = \frac{1}{2}$. D'après le cours, si f est dérivable en $(0,0)$ alors nécessairement les constantes A et B sont :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}$. Cela contredit les résultats obtenus à la question 1.
Conclusion : pour montrer qu'une fonction de deux variables est dérivable en un point, il ne suffit *pas* de montrer qu'elle admet des dérivées partielles en ce point.

Exercice 7. 1) $f(x,y) = x+y$, $a = (1,1)$. La fonction f est clairement définie et dérivable sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle est dérivable en a. De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$. Donc le développement de f à l'ordre 1 en a est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\varepsilon(x-1,y-1) \\ &= 2 + (x-1) + (y-1) + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\varepsilon(x-1,y-1) \end{aligned}$$

où ε est une fonction de deux variables continue et nulle en $(0,0)$.

2) $f(x,y) = x^2+y^2$, $a = (x_0,y_0)$. La fonction f est clairement définie et dérivable sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle est dérivable en a. De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. Donc le développement de f à l'ordre 1 en a est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \sqrt{(x-x_0)^2+(y-x_0)^2}\varepsilon(x-x_0,y-y_0) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\varepsilon(x-x_0,y-y_0) \end{aligned}$$

où ε est une fonction de deux variables continue et nulle en $(0,0)$.

3) Résultat : $f(x,y) = 1 + 3(x-1) + 3y + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\varepsilon(x-1,y)$.

4) Résultat : $f(x,y) = -x + \sqrt{x^2 + (y-\pi)^2}\varepsilon(x, y-\pi)$.

Exercice 9. Soit $f(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et a des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 3x$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -2 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 2, un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 1 et une fonction $\varphi : I \to J$ tels que, pour tout $x \in I$ et $y \in J$, $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. De plus, la fonction φ est dérivable sur I et

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}. \tag{1}$$

2) Calculons $\varphi(2)$. D'après ce qui précède, $\varphi(2) = y$ (avec $y \in J$) équivaut à $f(2,y) = 0$. Or, $f(2,1) = 0$ et $1 \in J$ donc $\varphi(2) = 1$. De plus,

$$\varphi'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)} = 1.$$

Pour calculer le D.L. de φ à l'ordre 2, on utilise le théorème de Taylor-Young. Pour cela, on a besoin de vérifier d'abord que φ est deux fois dérivable sur un voisinage de 0. Mais les fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) = 2x - 3\varphi(x) + 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 4\varphi(x)^3 - 3x$$

sont dérivables sur I car φ l'est. De plus, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))$ ne s'annule pas pour $x = 0$, donc est non nulle dans un petit voisinage de $x = 0$. Donc d'après (1), φ' est dérivable dans un voisinage de 0. Ceci montre que φ est deux fois dérivable dans un voisinage de 0.

Calculons $\varphi''(2)$. La formule (1) montre que

$$2x - 3\varphi(x) + 1 + \varphi'(x)(4\varphi(x)^3 - 3x) = 0.$$

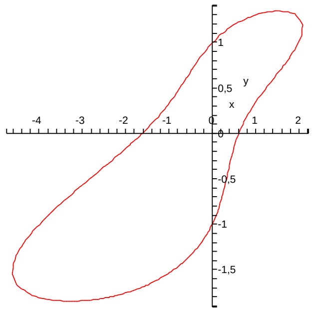
On dérive cette relation par rapport à x.

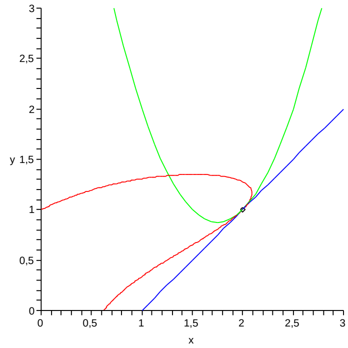
$$2 - 3\varphi'(x) + (12\varphi'(x)\varphi(x)^2 - 3)\varphi'(x) + (4\varphi(x)^3 - 3x)\varphi''(x) = 0$$

puis on fait $x = 2$ et on obtient $\varphi''(2) = 4$. Enfin, d'après Taylor-Young, le DL de φ en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(2) + \varphi'(2)(x-2) + \frac{\varphi''(2)}{2!}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2)\\ &= 1 + (x-2) + 2(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2).\end{aligned}$$

Illustration : à gauche, la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ dans le plan ; à droite, la courbe, la tangente au point $(2,1)$ d'équation $y = 1 + (x-2)$ (d'après le développement limité) et la parabole d'équation $y = 1 + (x-2) + 2(x-2)^2$.





Exercice 10.

1) Le point $A = (1,1)$ appartient à la courbe Γ d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ car les coordonnées du point vérifient l'équation de Γ.
Pour trouver l'équation de la droite tangente à Γ en A, on procède comme dans l'exercice précédent en utilisant le théorème des fonctions implicites. La fonction $f(x,y) = x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$ est définie sur $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. De plus,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0.$$
Donc d'après le théorème, il existe une intervalle ouvert I contenant 1, un intervalle ouvert J contenant 1 et une fonction $\varphi : I \to J$ vérifiant : pour tout $(x,y) \in I \times J$, $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$.
L'équation de la tangente à la courbe en A est donnée par : $y = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1)$. On a $f(1,1) = 0$ donc $\varphi(1) = 1$. De plus, toujours d'après le théorème,
$$\varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -\frac{1}{2}.$$
L'équation de la tangente est donc : $y = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$.

2) Pour déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente, on calcule un DL de φ à l'ordre 2 en 1. D'après le théorème des fonctions implicites,
$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{3x^2 - 2\varphi(x)}{-2x + 4\varphi(x)}$$
Donc $\varphi'(x)$ est dérivable dans un voisinage de 1 et φ est deux fois dérivable dans un voisinage de 1. En dérivant cette relation par rapport à x puis en faisant $x = 1$ on obtient $\varphi''(1) = -\frac{9}{2}$. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, φ possède un DL en 1 à l'ordre 2 donné par :
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2!}(x-1) + (x-1)^2\varepsilon(x-1)\\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{9}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1).\end{aligned}$$
La position par rapport à la tangente est donnée par le signe de $-\frac{9}{4}(x-1)^2$ qui est toujours négatif. Donc la courbe est toujours en-dessous de sa tangente en $x = 1$.

Exercice 11.

Soient les surfaces S_1 et S_2 définies par : $z = x^2 + y^2$ et $z = 2x^2y^2$ et soit B le point de coordonnées $(1,1,2)$. Remarquons que le point B appartient à S_1 et S_2 puisque ses coordonnées vérifient les équations de ces deux surfaces.

1) Posons $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = 2x^2y^2$. Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$, en particulier en $(1,1)$. De plus,
$$\begin{array}{ll}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4xy^2 & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4x^2y.\end{array}$$

Donc l'équation du plan tangent à S_1 en B est :

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

et l'équation du plan tangent à S_2 en B est :

$$z = g(1,1) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)(y-1) = 2 + 4(x-1) + 4(y-1).$$

2) L'intersection $S_1 \cap S_2$ est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $z = x^2 + y^2 = 2x^2y^2$. Le plan xOy est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$. La projection de $S_1 \cap S_2$ sur ce plan est donc l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x^2 + y^2 = 2x^2y^2$. C'est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ que l'on note Γ. Remarquons que le point $(1,1)$ est sur Γ.

Posons $h(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 = f(x,y) - g(x,y)$. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ (comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$). Pour trouver la tangente à Γ au point $(1,1)$, on utilise le théorème des fonctions implicites comme dans les deux exercices précédents.

Les fonctions $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x - 4y^2x$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2y - 4x^2y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = -2 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert I contenant 1, un intervalle ouvert J contenant 1 et une fonction $\varphi : I \to J$ vérifiant : pour tout $x \in I$ et $y \in J$, $h(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. De plus φ est dérivable sur I et

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial h}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

La droite tangente à la courbe Γ en $(1,1)$ a pour équation : $y = \varphi(1) + (x-1)\varphi'(1)$. Comme $h(1,1) = 0$, on a $\varphi(1) = 1$. Par ailleurs, l'expression pour $\varphi'(x)$ évaluée en $x = 1$ donne $\varphi'(1) = -1$. L'équation de la tangente est donc :

$$y = 1 + (-1)(x-1) = 2 - x.$$

Autre méthode : (en rapport avec la question 1) L'intersection des plans tangents, notés P_1 et P_2, est un plan, une droite ou l'ensemble vide. Ici, c'est en fait une droite. La tangente à Γ est la projection de $P_1 \cap P_2$ sur le plan xOy (démontrez-le !). Calculons cette projection. D'abord, $P_1 \cap P_2$ est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) = 2 + 4(x-1) + 4(y-1).$$

Sa projection sur le plan $z = 0$ est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$2 + 2(x-1) + 2(y-1) = 2 + 4(x-1) + 4(y-1).$$

Cette équation équivaut à $y = 2 - x$. On retrouve l'équation de la tangente obtenue par la première méthode.