Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

Premier semestre 2007/08
PCME12

Instructions pour la feuille d'exercices n° 5

---

1 Fonction de deux variables : à connaître

Voici les objectifs pour cette feuille de TD.
Ce qu'il faut *absolument* savoir faire :

- Déterminer le domaine de définition d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ et le tracer dans le plan (*exercice 1*) ;
- Déterminer et représenter une ligne de niveau dans le plan (*exercice 1*) ;
- Calculer des dérivées partielles (*exercice 3*) ; calculer un gradient ;
- Déterminer l'équation du plan tangent à une surface (*exercice 8*).

Ce qu'il faudrait aussi savoir faire :

- Comprendre la notion de continuité dans $\mathbb{R}^2$ (*exercices 2 et 4*)
- Comprendre les notions de dérivabilité et de dérivées partielles (*exercices 5 et 7*) ;
- Comprendre et appliquer le théorème des fonctions implicites ; l'utiliser pour déterminer la tangente à une courbe de $\mathbb{R}^2$ donnée par une équation « implicite » (*exercices 9, 10, 11*).

2 Prérequis et rappels pour aborder les exercices

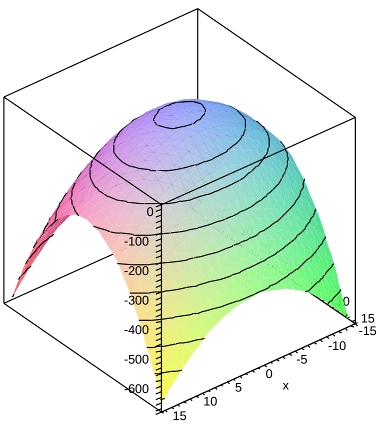
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

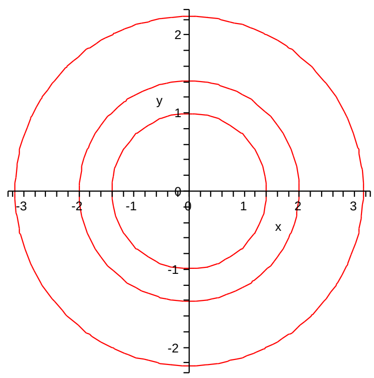
La notion de **domaine de définition** d'une fonction de deux variables a été rappelée en TD.

Lignes (ou courbes) de niveau. Soit c un nombre réel fixé. On appelle *ligne de niveau c de f* l'ensemble des $(x, y) \in D$ vérifiant $f(x, y) = c$.

- c'est donc le sous-ensemble de D sur lequel f prend la valeur c. Si la fonction n'est pas trop compliquée, on peut représenter graphiquement cette ligne de niveau dans le plan.
- géométriquement, cela correspond à couper la surface d'équation $z = f(x, y)$ par le plan horizontal d'équation $z = c$. Par exemple, sur une carte topographique ou de randonnée, les lignes de niveau désignent les points de même altitude.

Ci-dessous : à gauche, la surface d'équation $z = -x^2 - 2y^2$ coupée par différents plans horizontaux ; à droite, ses lignes de niveau -2, -4 et -10.





Continuité. Soit $P = (a, b)$ un point de D. On dit que la suite $X_n = (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers le point (a, b) si la distance

$$d(X_n, P) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Cela équivaut à dire que la suite x_n converge vers a *et* la suite y_n converge vers b.

On dit que f est *continue en* (a,b) si, *pour toute suite* (x_n, y_n) de points de D qui converge vers (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, la suite $f(x_n, y_n)$ converge vers $f(a,b)$ dans $\mathbb{R}$.

Attention : il faut bien montrer la propriété pour toute suite (x_n, y_n). Il ne suffit pas de le montrer pour les suites (x_n, b) et (a, y_n). c'est-à-dire « selon l'axe des x » et « selon l'axe des y ». Voir les exercices 2 et 4.

Comme d'habitude, une somme de fonctions continues est continue ; un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continue ; une composée de fonctions continues est continue.

Dérivabilité. Soit $P = (a,b)$ un point de D. On dit que la fonction f est *dérivable* (ou *différentiable*) en (a,b) s'il existe des réels A et B (qui dépendent de P) vérifiant :

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + d(X,P)\varepsilon(x-a, y-b)$$

où $d(X,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ est la distance entre les points $X = (x,y)$ et $P = (a,b)$ et où ε est une fonction (de deux variables) continue et nulle en $(0,0)$.

Si f est dérivable en (a,b), alors f est continue en (a,b).

Comme d'habitude, une somme de fonctions dérivables est dérivable ; un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivable. On a aussi un théorème de dérivation des fonctions composées (voir le cours, ou le cours en ligne).

Dérivées partielles. Soit (a,b) un point fixé de D. On dit que f a une *dérivée partielle par rapport à x en* (a,b) si la fonction d'une variable réelle $x \mapsto f(x,b)$ est dérivable en $x = a$. Cette dérivée est alors notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. De même, on dit que f a une *dérivée partielle par rapport à y en* (a,b) si la fonction d'une variable réelle $y \mapsto f(a,y)$ est dérivable en $y = b$. Cette dérivée est alors notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Parfois, le point (a,b) est noté (x,y) afin d'alléger la notation. On définit les fonctions dérivées partielles (ce sont des fonctions de deux variables réelles) par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

Exemple 1 (feuille 5, exercice 3) : $f(x,y) = xy$. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$. Les fonctions $x \mapsto xy$ et $y \mapsto xy$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f possède des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point de $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$$

Exemple 2. $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$ et les fonctions $x \mapsto \sin(x)\cos(y)$ et $y \mapsto \sin(x)\cos(y)$ sont dérivables. Donc f possède des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point de $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\cos(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x)\sin(y).$$

Dérivabilité et dérivées partielles.

Si f est une fonction dérivable en (a,b), alors f possède des dérivées partielles en (a,b) et vérifie l'égalité :

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\varepsilon(x-a, y-b)$$

où ε est une fonction continue et nulle en $(0,0)$. On appelle parfois cette égalité le *développement à l'ordre 1 de f en* (a,b).

Attention : l'existence de dérivées partielles ne permet pas toujours de dire qu'une fonction est dérivable (voir l'exercice 5) ni même qu'elle est continue (voir l'exercice 4, question 3).

Cependant, si f est une fonction définie sur une partie « ouverte » D de $\mathbb{R}^2$, qui a des dérivées partielles en tout point de D, et *dont les dérivées partielles sont des fonctions continues sur* D, alors f est dérivable sur D. En particulier, f est continue sur D.

Équation du plan tangent à une surface. Soit (a,b) un point fixé de D. Si la fonction f est dérivable en (a,b), alors la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ possède un plan tangent en (a,b), dont l'équation est :

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Théorème des fonctions implicites. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in D$ un point fixé. Supposons que :

- D contient un disque de rayon non nul de centre (a,b) ;
- les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur D ;
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

alors il existe :

- un intervalle ouvert I contenant a ;
- un intervalle ouvert J contenant b ;
- une fonction d'une variable réelle $\varphi : I \to J$

tels que, tous nombres x de I et y de J vérifient $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. De plus, la fonction φ est dérivable sur I et

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

Le théorème dit que, si f vérifie les hypothèses de l'énoncé, les lignes de niveau de la surface d'équation $z = f(x,y)$ sont localement le graphe d'une fonction d'une variable φ.

Exemple. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. La courbe d'équation $f(x,y) = 0$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans le plan.

– soit $A = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. On a $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \sqrt{3} \neq 0$. Donc localement « au voisinage » de A, le cercle est le graphe d'une fonction d'une variable $y = \varphi(x)$. D'ailleurs, dans ce cas, on peut même trouver la fonction φ : $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$.
– soit $B = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Là encore, $\frac{\partial f}{\partial y}(B) \neq 0$ et on peut appliquer le théorème au voisinage de B. Dans ce cas, la fonction est $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$.
– soit $C = (1,0)$. Ici, $\frac{\partial f}{\partial y}(C) = 0$, donc on ne peut pas appliquer le théorème.

De façon générale, il est rare qu'on puisse trouver l'expression de la fonction φ.

Gradient. Si la fonction f est dérivable en chaque point de D, on définit une application $\mathrm{grad} f$ de D dans $\mathbb{R}^2$, appelé *gradient de* f, par

$$(\mathrm{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Interprétation. Soit $P = (a,b)$ un point de D. Supposons que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites (en particulier $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$). Considérons la courbe de niveau de f passant par le point P, notée $\mathcal{C}$. Alors le théorème dit que : le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en P et le vecteur gradient $(\mathrm{grad} f)(P)$ sont orthogonaux. Ci-dessous : une surface, deux lignes de niveau (en vert) et un vecteur gradient (en bleu).