Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie — Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 — PCME12

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et le représenter dans $\mathbb{R}^2$.

$f_1(x,y) = \sqrt{x+y}$ $\quad f_2(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y}}{x} + \ln(x)$

$f_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ $\quad f_4(x,y) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{3-y^2}$

$f_5(x,y) = \sqrt{x^{1/3} - y^{1/3}}$ $\quad f_6(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

$f_7(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2y-x^2}}$

Représenter les courbes de niveau 0, 1 et 2 pour les fonctions f_1, f_3 et f_7.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

1) $f(x,y) = e^{x+y}$ $\quad$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\quad$ 4) $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$

5) $f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$

Exercice 3. Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes et les calculer.

1) $f(x,y) = xy$ $\quad$ 2) $f(x,y) = \arctan(x - 3y^2)$

3) $f(x,y) = e^{xy}\sin(x+y)$ $\quad$ 4) $f(x,y) = x^y$

Exercice 4. Soit la fonction définie, pour $(x,y) \neq (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

1) Montrer que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$.
2) Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.
3) On pose désormais $f(0,0) = 0$. Montrer que f a des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que f n'est pas continue en 0.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité de f par rapport à x et y au point $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$.
3) Montrer que f n'est pas dérivable (différentiable) au point $(0,0)$.

Exercice 6. 1) Soient α_1, α_2 et γ des réels $\geqslant 0$. On pose

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|+|y|)^{\gamma}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha_1+\alpha_2>\gamma$.
(*Indication : pour la condition nécessaire, regarder $f(x,x)$, pour la condition suffisante, montrer que $0\leqslant f(x,y)\leqslant(|x|+|y|)^{\alpha_1+\alpha_2-\gamma}$, ou utiliser les coordonnées polaires.*)

2) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha_1+\alpha_2>\gamma+1$.

Exercice 7. Donner un développement à l'ordre 1 des fonctions suivantes au voisinage des points a indiqués.

1) $f(x,y)=x+y$, $a=(1,1)$
2) $f(x,y)=x^2+y^2$, $a=(1,1)$, $a=(0,2)$, $a=(x_0,y_0)$
3) $f(x,y)=x^2+3xy-y^3$, $a=(1,0)$
4) $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$, $a=(0,\pi)$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point a indiqué ainsi qu'un vecteur normal à ce plan.

1) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$, $a=(1,2)$
2) $f(x,y)=e^x y$, $a=(-1,1)$
3) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^4}$, $a=(2,1)$
4) $f(x,y)=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $a=(\sqrt{2},\sqrt{2})$

Exercice 9. Soit $f(x,y)=x^2+y^4-3xy+x-1$.

1) Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à f au point $(2,1)$.
2) Soit $\varphi(x)$ une fonction telle que au voisinage de $(2,1)$ on ait

$$f(x,y)=0\Longleftrightarrow y=\varphi(x).$$

Calculer $\varphi(2)$. Montrer que $f(x,\varphi(x))=0$. En dérivant deux fois cette dernière inégalité et en prenant $x=2$, calculer $\varphi(2)$ et $\varphi'(2)$. En déduire le développement limité de φ à l'ordre 2 au point 2.

Exercice 10. Soit la courbe Γ définie par l'équation : $x^3-2xy+2y^2-1=0$ et soit A le point de coordonnées $(1,1)$.

a) Vérifier que A appartient à Γ et trouver la tangente à la courbe en A.
b) Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en A.

Exercice 11. Soient les surfaces S_1 et S_2 définies par : $z=x^2+y^2$, $z=2x^2y^2$ et soit B le point de coordonnées $(1,1,2)$.

a) Déterminer le plan tangent à S_1 en B, le plan tangent à S_2 en B.
b) Trouver la tangente en $(1,1)$ à la projection de $S_1\cap S_2$ sur le plan xOy.