Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie | Premier semestre 2007/08
Licence première année - LM110 | PCME12

Quelques corrections pour la feuille d'exercices n° 6

Exercice 2

(c) Mettre l'équation sous forme $y' = \frac{1}{4x}y + \frac{1}{4\sqrt{x}}$ (E). On cherche les solutions définies sur $]0,+\infty[$ (à cause de la racine carrée). Réponses : solutions de l'équation homogène : $y(x) = Cx^{1/4}$ où $C \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de (E) : $\sqrt{x}$. Les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$ sont les $\sqrt{x} + Cx^1/4$ où $C \in \mathbb{R}$.

(d) L'équation sans second membre est $xy' + y = 0$. Pour $x \neq 0$, elle est équivalente à $y' + \frac{y}{x} = 0$. On la résout séparément sur les deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
Sur $]0,+\infty[$, une primitive de $-\frac{1}{x}$ est $-\ln(x)$ donc la solution générale de l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ est $y(x) = Ce^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ où C décrit $\mathbb{R}$.
Sur $]-\infty,0[$, une primitive de $-\frac{1}{x}$ est $-\ln(-x)$ donc la solution générale de l'équation homogène sur $]-\infty,0[$ est $y(x) = De^{-\ln(-x)} = \frac{D}{-x}$ où D décrit $\mathbb{R}$. On peut encore l'écrire sous la forme $y(x) = \frac{C}{x}$ où C décrit $\mathbb{R}$.
On cherche alors une solution particulière de l'équation avec second membre avec la méthode de la variation de la constante, sous la forme $y(x) = \frac{C(x)}{x}$. Sur un des deux intervalles précédent, l'équation est équivalente à $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{e^x}{x}$. Or, $y'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$. En remplaçant, on obtient que $y(x) = \frac{C(x)}{x}$ est solution de l'équation si et seulement si

$$C'(x) = e^x$$

Une primitive de e^x sur les deux intervalles est e^x. Donc une solution particulière est $\frac{e^x}{x}$.
Conclusion : sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la solution générale de l'équation est $y_1(x) = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x} = \frac{C_1+e^x}{x}$ où C_1 décrit $\mathbb{R}$; sur l'intervalle $]0,+\infty[$, la solution générale de l'équation est $y_2(x) = \frac{C_2}{x} + \frac{e^x}{x} = \frac{C_2+e^x}{x}$ où C_2 décrit $\mathbb{R}$.
Pour savoir s'il existe des solutions continues sur $\mathbb{R}$, on cherche s'il existe des constantes C_1 et C_2 telle que la fonction définie par

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x < 0 \\ y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

peut être prolongée par continuité en 0 et est une solution de l'équation différentielle. Pour cela, on calcule $\lim_{x\to 0} y(x)$, si elle existe. Un développement limité de e^x en 0 à l'ordre 1 donne :

$$y_1(x) = \frac{C_1 + e^x}{x} = \frac{C_1 + 1 + x + x\varepsilon(x)}{x} = \frac{C_1 + 1}{x} + 1 + \varepsilon(x).$$

Donc $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{y\to 0} y_1(x)$ existe et est finie si et seulement si $C_1 = -1$. De même, $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{y\to 0} y_2(x)$ existe et est finie si et seulement si $C_2 = -1$. Donc $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ convient. On vérifie que l'équation $xf'(x) + f(x) = e^x$ est vérifiée en $x = 0$. Donc f est l'unique solution continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1) On cherche une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = ax$ pour $x \in]0,+\infty[$. Alors en remplaçant $y(x)$ par ax dans (E) on a

$$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$

donc $a^2 = 9$. On prend donc $y_0(x) = 3x$ comme solution particulière de (E) définie sur $]0,+\infty[$.

2) On fait le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ à trouver. Ici $y_0(x) = 3x$ donc $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$. On calcule les dérivées et le carré de $y(x)$:

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$

donc en remplaçant dans (E) on a

$$3+\frac{z'(x)}{z^2(x)}-3+\frac{1}{xz(x)}-9x^2+\frac{6x}{z(x)}-\frac{1}{z^2(x)}=9x^2,$$

d'où en simplifiant et en arrangeant,

$$(E_1) \qquad z'(x)+\big(6x+\frac{1}{x}\big)z(x)=1.$$

3) On résout l'équation homogène $z'(x)+(6x+\frac{1}{x})z(x)=0$ sur $]0,+\infty[$. Une primitive de $-6x-\frac{1}{x}$ sur cet intervalle est $-3x^2-\ln(x)$, donc la solution générale de l'équation homogène est $y(x)=Ce^{-3x^2-\ln(x)}=C\frac{e^{-3x^2}}{x}$ où C décrit $\mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de (E_1) par la méthode de variation de la constante. Un calcul montre que la fonction $z(x)=C(x)\frac{e^{-3x^2}}{x}$ est solution de (E_1) si et seulement si $C'(x)=xe^{3x^2}$. Une primitive de xe^{3x^2} sur l'intervalle considéré est $\frac{1}{6}e^{3x^2}$. Donc la solution générale de (E_1) est :

$$z(x)=\frac{1}{6x}+C\frac{e^{-3x^2}}{x}$$

où C décrit $\mathbb{R}$.

4) D'après la question 2), les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$ sont :

$$y(x)=y_0(x)-\frac{1}{z(x)}=3x-\left(\frac{1+6Ce^{-3x^2}}{6x}\right)^{-1}=3x-\frac{6x}{1+De^{-3x^2}}$$

où D décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1) Il y a une erreur d'énoncé : on demandait de calculer le développement à l'ordre 2.
Posons $x=1+t$. On a : $\ln x=\ln(1+t)=t-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+t^3\varepsilon_1(t)$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon_1(t)=0$. On déduit $x^2\ln x=(1+2t+t^2)\ln(1+t)=t+\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+t^3\varepsilon_2(t)$ et comme $x^2-1=2t+t^2$, pour $x\neq 1$, on a $f(x)=\dfrac{1+\frac{3}{2}t+\frac{1}{3}t^2+t^2\varepsilon_2(t)}{2+t}$. On obtient alors :

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}t^2+t^2\varepsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{12}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon(x-1) \quad \text{avec} \lim_{x\to 1}\varepsilon(x)=0.$$

2) (a) Sur chacun des intervalles proposés, l'équation sans second membre s'écrit :

$$y'=\frac{-2}{x(x^2-1)}y=\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)y.$$

En prenant, sur chacun des intervalles, une primitive de $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$, on obtient que la solution est $y(x)=\dfrac{\lambda x^2}{x^2-1}$ où λ décrit $\mathbb{R}$. La recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de la variation de la constante conduit à $\lambda'(x)=\dfrac{1}{x}$. On a donc finalement, sur chacun des intervalles, une solution de la forme $y=\dfrac{\lambda_i x^2}{x^2-1}+\dfrac{x^2\ln|x|}{x^2-1}$ où λ_1 est la constante sur l'intervalle $]-\infty,-1[$, λ_2 celle sur $]-1,0[$, λ_3 celle sur $]0,1[$ et λ_4 celle sur $]1,+\infty[$.

Exercice 5.

(a) $(*)\ \ y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$. Comme 1 est racine de l'équation caractéristique, on cherche un polynôme $P(x)$ de degré 1. En remplaçant y_p dans $(*)$ on obtient : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$. Ici le polynôme caractéristique est $(r-1)(r+1)$ et l'équation homogène a pour solutions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $3\cos x$ vérifie l'équation : $y'' - y = -6\cos x$. On remarque aussi que la fonction $-\sin x$ vérifie l'équation : $y'' - y = 2\sin x$. Les solutions sont par conséquent les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 3\cos x - \sin x \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Réponses : solution de l'équation homogène : $A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A et B dans $\mathbb{R}$. Solution particulière de l'équation avec second membre (on la cherche sous la forme $Q(x)e^x$ où Q est un polynôme en x de degré 1) : $\frac{1}{2}(x-1)e^x$. Les solutions de l'équation sont donc les $A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{1}{2}(x-1)e^x$ où A et B sont dans $\mathbb{R}$.

(d) Réponses : solution de l'équation homogène : $Ae^x + Be^{-x}$ avec A et B dans $\mathbb{R}$. Solution particulière de l'équation avec second membre (on la cherche sous la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$) : $3\cos(x) - \sin(x)$. Les solutions de l'équation sont donc les $Ae^x + Be^{-x} + 3\cos(x) - \sin(x)$ où A et B sont dans $\mathbb{R}$.

(e) Réponses : Solution particulière de l'équation avec second membre (on la cherche sous la forme $Q(x)e^x$ avec Q polynôme de degré 3 car 1 est racine de l'équation caractéristique) : $(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + d)e^x$ où d est un réel quelconque (on peut prendre $d = 0$). Les solutions de l'équation sont donc les $Ae^x + Be^{-x} + 3(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x)e^x$ où A et B sont dans $\mathbb{R}$.

(f) Réponses : solution de l'équation homogène : $e^{-x/2}(A\cos(x) + B\sin(x))$ avec A et B dans $\mathbb{R}$.
Solution particulière de l'équation avec second membre. On utilise le principe de superposition : on cherche une solution y_1 de l'équation avec pour second membre $\sin(x)$, une solution y_2 de l'équation avec pour second membre $e^{-x/2}$. Une solution particulière de notre équation sera alors $y_1 + y_2$.
La solution y_1 s'obtient en la cherchant sous la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$. On obtient $y_1(x) = -\frac{4}{17}\cos(x) + \frac{1}{17}\sin(x)$. La solution y_2 s'obtient en la cherchant sous la forme $de^{-x/2}$ (puisque $-1/2$ n'est pas racine de l'équation caractéristique). On obtient $y_2(x) = \frac{1}{4}e^{-x/2}$.
Les solutions de l'équation sont donc les $e^{-x/2}(A\cos(x) + B\sin(x)) + -\frac{4}{17}\cos(x) + \frac{1}{17}\sin(x) + \frac{1}{4}e^{-x/2}$ où A et B varient dans $\mathbb{R}$.

(g) Réponse : $x \to \dfrac{\lambda x + \mu}{\sqrt{1+x^2}}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

1) Le polynôme caractéristique associé à (E) est : $r^2 + 2r + 4$; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$.

2) Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}Q(x)$ avec $\lambda = 1$ et $Q(x) = x$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = R(x)e^x$ avec R polynôme de degré égal à celui de Q puisque 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique. On pose donc $R(x) = ax + b$. On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc y_p est solution si et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$. On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ est donc solution de (E) et la forme générale des solutions de (E) est :

$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

3) Soit h une solution de (E). Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées ssi

$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{et} \qquad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

4) (a) On a par le théorème de dérivation des fonctions composées : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$

(on a utilisé la propriété que vérifie f) donc g est solution de (E).

(b) Réciproquement pour $f(t) = g(\log t)$ où g est une solution de (E) on montre que f est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions f recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\sin(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.

1) L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine (double) $r = 2$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Pour $d(x) = e^{-2x}$ on peut chercher une solution particulière de la forme : $y_1(x) = ae^{-2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ car -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $y_1'(x) = -2e^{-2x}$ et $y_1''(x) = 4ae^{-2x}$. Par conséquent y_1 est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4a - 4(-2a) + 4a)e^{-2x} = e^{-2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{16}$.
Pour $d(x) = e^{2x}$ on cherche une solution de la forme $y_2(x) = ax^2e^{2x}$, avec $a \in \mathbb{R}$, car 2 est racine double de l'équation caractéristique. On a $y_2'(x) = (2ax + 2ax^2)e^{2x}$ et $y_2''(x) = (2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x}$. Alors y_2 est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (4ax^2 + 8ax + 2a - 4(2ax + 2ax^2) + 4ax^2)e^{2x} = e^{2x}$$

donc si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

3) On déduit du principe de superposition que la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(y_1(x) + y_2(x)) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x}$$

est solution de l'équation pour le second membre donné dans cette question, et la forme générale des solutions est alors :

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$