Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes :

(a) $-xy'y^2 + (1-x^2) = 0$ (b) $y' + 2xy = 0$ (c) $y' + \dfrac{1}{x^2+1}y = 0,\ y(1) = 1$

(d) $x(x^2-1)y' + 2y = 0$, (on déterminera a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$).

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

(a) $y' + 2xy = x$, $y(0) = 1$ (b) $(x^2-1)y' - xy = -1$ (c) $4xy' - y = \sqrt{x}$

(d) $xy' + y = e^x$ (déterminer les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Y a-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}$?)

Exercice 3. On se propose de résoudre sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) Déterminer $a \in]0, +\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2) Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3) Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$.
4) Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4. 1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $x = 1$ de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}.$$

2) On considère l'équation différentielle (E) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.
   a) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.
   b) Montrer que (E) admet une unique solution g sur $\mathbb{R}$.
   c) La fonction dérivée g' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

(a) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ (b) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ (c) $y'' + y = xe^x$

(d) $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$ (e) $y'' - y = (x^2+x+1)e^x$ (f) $4y'' + 4y' + 5y = \sin x + e^{-x/2}$

(g) $y''(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}y'(x) + \dfrac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0$ (utiliser le changement de variable $t = \arctan x$)

Exercice 6. On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2) Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$. Vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 7. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1) Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à (E).
2) Trouver une solution particulière de (E) lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3) Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$