Corrigé de l'interrogation écrite n°1

Mardi 7 avril 2015

Exercice 1. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A telle que $0 \notin S$.

1) Supposons A intègre. L'anneau $S^{-1}A$ est non nul car $0 \notin S$. Supposons que $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t}$ vérifient $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = 0 = \frac{0}{1}$ dans $S^{-1}A$. Il existe $u \in S$ tel que $uab = 0$. Or A est intègre et $u \neq 0$ donc $a = 0$ ou $b = 0$, c'est-à-dire $\frac{a}{s} = 0$ ou $\frac{b}{t} = 0$. L'anneau $S^{-1}A$ est intègre.

2) Posons $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $S = \{\overline{2}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (S ne contient pas 0). L'anneau A n'est pas intègre car 6 n'est pas premier. Supposons $\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{0}{1}$ dans $S^{-1}A$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{2}^k ab = 0$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. En notant α (resp. β) un entier tel que $a = \overline{\alpha}$ et $b = \overline{\beta}$, on a 6 divise $2^k\alpha\beta$ dans $\mathbb{Z}$ d'où 3 divise $2^k\alpha\beta$. D'après les lemmes de Gauss et d'Euclide, 3 divise $\alpha\beta$ donc 3 divise α ou 3 divise β. Plaçons-nous dans le premier cas : on écrit alors, pour un certain $a' \in A$: $\frac{a}{s} = \frac{\overline{3}a'}{s} = \frac{\overline{6}a'}{\overline{2}s} = \frac{0}{1}$ (car $\overline{2} \in S$) d'où $\frac{a}{s} = 0$. Même raisonnement si 3 divise β. Cela montre que l'anneau non nul $S^{-1}A$ est intègre.

Exercice 2. Soit S une partie multiplicative d'un anneau A et soit I un idéal de A.

1) Posons $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\}$. Cet ensemble contient $\frac{0}{1}$ (car $0 \in I$), il est donc non vide. Si $\frac{i}{s}$ et $\frac{j}{t}$ appartiennent à $S^{-1}I$ alors on a $\frac{i}{s} - \frac{j}{t} = \frac{it-js}{st}$, qui appartient à $S^{-1}I$ car $it \in I$ et $js \in I$. Si $\frac{i}{s} \in S^{-1}I$ et $\frac{a}{t} \in S^{-1}A$ alors on a $\frac{i}{s}\frac{a}{t} = \frac{ia}{st}$, qui appartient à $S^{-1}I$ car $ia \in I$. Donc $S^{-1}I$ est un idéal de $S^{-1}A$.

2) Supposons que I est maximal et $I \cap S = \emptyset$.
Première méthode. Considérons le morphisme d'anneaux
$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & S^{-1}A/S^{-1}I \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1} \bmod S^{-1}I. \end{array}$$
(composition de l'application canonique $A \to S^{-1}A$ et du passage au quotient par $S^{-1}I$). On a $\operatorname{Ker} f = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in S^{-1}I\} = \{a \in A \mid \exists i \in I, s \in S : \frac{a}{1} = \frac{i}{s}\} = \{a \in A \mid \exists i \in I, s \in S, t \in S : tas = ti\}$. Si $tas = ti$, comme I est un idéal premier on a $t \in I$ ou $s \in I$ ou $a \in I$; mais $I \cap S = \emptyset$ donc $a \in I$. Cela donne $\operatorname{Ker} f \subset I$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a $\operatorname{Ker} f = I$.
Par factorisation on obtient un morphisme d'anneaux injectif $\phi : A/I \to S^{-1}A/S^{-1}I$. Montrons que c'est un isomorphisme, c'est-à-dire que f est surjective. Comme $\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s}$, il suffit de vérifier que pour tout $s \in S$ il existe $b \in A$ tel que $\frac{b}{1} \equiv \frac{1}{s} \bmod S^{-1}I$. Comme I est maximal et $s \notin I$, on a $I + (s) = A$. Il existe donc $i \in I$ et $b \in A$ tels que $1 = i + bs$. Il vient $\frac{1}{s} = \frac{i}{s} + \frac{b}{1}$ d'où $\frac{b}{1} \equiv \frac{1}{s} \bmod S^{-1}I$, ce qu'il fallait montrer. Ainsi ϕ est un isomorphisme.
Deuxième méthode. Soit $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique. Comme I est maximal, A/I est un corps donc $(A/I)^\times = A/I - \{0\}$. Pour tout $s \in S$, on a $\pi(s) \neq 0$ car $I \cap S = \emptyset$. Donc $\pi(S) \subset (A/I)^\times$ et la propriété universelle de $S^{-1}A$ donne l'existence d'un morphisme
$$\begin{array}{rcl} g : S^{-1}A & \longrightarrow & A/I \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \pi(a)\pi(s)^{-1} \bmod I. \end{array}$$
De plus $\operatorname{Ker} g = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid \pi(a)\pi(s)^{-1} = 0\}$. Par intégrité de A/I, on en déduit $\operatorname{Ker} g = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in I\} = S^{-1}I$. En factorisant g, on a ainsi un morphisme $\psi : S^{-1}A/S^{-1}I \to A/I$, qui est injectif et qui envoie $\frac{a}{s} \bmod S^{-1}I$ sur $\pi(a)\pi(s)^{-1}$. De plus ψ est surjectif car g l'est (tout $\pi(a)$ a pour antécédent $\frac{a}{1} \bmod S^{-1}I$). Donc ψ est un isomorphisme.

Enfin comme I est maximal, les anneaux A/I et $S^{-1}A/S^{-1}I$ sont des corps donc l'idéal $S^{-1}I$ est maximal.

Exercice 3. Soient k un corps algébriquement clos et n un entier supérieur ou égal à 1.

1) Les fermés de la topologie de Zariski sur k^n sont les $Z(T)$ où T parcourt les parties de $k[X_1, \ldots, X_n]$ (ou, de manière équivalente, les $Z(I)$ où I parcourt les idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$).
2) D'après le cours, on a $Z(\mathcal{I}(V)) = \overline{V}$ pour toute partie V de k^n. Or V est supposé fermé donc $Z(\mathcal{I}(V)) = V$.
3) Soit V un fermé non vide de k^n muni de la topologie de Zariski induite.

   ($\Rightarrow$) Supposons V irréductible. Comme $V \neq \emptyset$, on a $\mathcal{I}(V) \subsetneq k[X_1, \ldots, X_n]$ (en utilisant la question 2). Soient f, g dans $k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $fg \in \mathcal{I}(V)$. On en déduit, en utilisant la question 2), $V = Z(\mathcal{I}(V)) \subset Z(f) \cup Z(g)$. d'où $V = (V \cap Z(f)) \cup (V \cap Z(g))$. C'est une réunion de fermés de V pour la topologie induite. Comme V est irréductible, on en déduit $V = V \cap Z(f)$ ou $V = V \cap Z(g)$. Plaçons-nous dans le premier cas. On a alors $V \subset Z(f)$. En particulier tout $\alpha \in V$ vérifie $f(\alpha) = 0$, donc $f \in \mathcal{I}(V)$. Dans l'autre cas, on obtient $g \in \mathcal{I}(V)$. Ainsi l'idéal $\mathcal{I}(V)$ est premier.

   ($\Leftarrow$) Raisonnons par contraposée. Supposons V non irréductible : il existe F_1, F_2 fermés de V, $F_1 \subsetneq V$ et $F_2 \subsetneq V$, tels que $V = F_1 \cup F_2$. Par décroissance de I, on en déduit $\mathcal{I}(V) \subset \mathcal{I}(F_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. De plus ces inclusions sont strictes (si $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(F_i)$, en appliquant Z et en utilisant la question 2) on aurait $V = F_i$ ce qui est exclu). Prenons donc $f_1 \in \mathcal{I}(F_1) - \mathcal{I}(V)$ et $f_2 \in \mathcal{I}(F_2) - \mathcal{I}(V)$. Comme $V = F_1 \cup F_2$, on a $(f_1 f_2)_{|V} = 0$ d'où $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(V)$. Or on a $f_1 \notin \mathcal{I}(V)$ et $f_2 \notin \mathcal{I}(V)$. L'idéal $\mathcal{I}(V)$ n'est pas premier.
4) Notons Prem l'ensemble des idéaux premiers de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et Irr l'ensemble des fermés irréductibles (non vides) de k^n. Considérons les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathrm{Prem} & \longrightarrow & \mathrm{Irr} \\ & I & \longmapsto & Z(I) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{Irr} & \longrightarrow & \mathrm{Prem} \\ & V & \longmapsto & \mathcal{I}(V). \end{array}$$

   D'après la question 3), ψ est bien définie. Il en est de même pour ϕ : si I est premier alors d'après le théorème des zéros on a $\mathcal{I}(Z(I)) = r(I) = I$ (car I est premier), et la question 3) assure que $Z(I)$ est irréductible. Nous venons au passage de montrer que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. La question 2) donne $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Les applications ϕ et ψ sont des bijections réciproques.

Barème :
Exercice 1 : 1) 2,5 pts (+0,5 si justif. $S^{-1}A \neq \{0\}$) 2) 2,5 pts (+0,5 si justif. $S^{-1}A \neq \{0\}$)
Exercice 2 : 1) 2 pts 2) 4,5 pts
Exercice 3 : 1) 1 pt 2) 2 pts 3) 4 pts (+0,5 pt si justif. $\mathcal{I}(V)$ est propre) 4) 2,5 pts.