Interrogation écrite n°1

Mardi 7 avril 2015

Durée : 1h20

Aucun document, calculatrice, téléphone portable ni appareil électronique n'est autorisé. Toute réponse devra être justifiée avec rigueur, soin et concision.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Exercice 1. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A telle que $0 \notin S$.

1) Montrer que si l'anneau A est intègre alors l'anneau localisé $S^{-1}A$ est intègre.
2) (La réciproque est fausse) Montrer que pour $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $S = \{\overline{2}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, l'anneau $S^{-1}A$ est intègre mais A n'est pas intègre.

Exercice 2. Soit S une partie multiplicative d'un anneau A et soit I un idéal de A.

1) Montrer que $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} \mid i \in I, s \in S\}$ est un idéal de $S^{-1}A$.
2) Supposons que I est maximal et $I \cap S = \emptyset$. Montrer que $S^{-1}A/S^{-1}I$ est isomorphe à A/I. Qu'en déduit-on sur l'idéal $S^{-1}I$?

Exercice 3. Soient k un corps algébriquement clos et n un entier supérieur ou égal à 1.
Pour $T \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, notons $Z(T) = \{\alpha \in k^n \mid \forall P \in T, P(\alpha) = 0\}$.
Pour $Y \subset k^n$, notons $\mathcal{I}(Y) = \{P \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall \alpha \in Y, P(\alpha) = 0\}$.

1) Rappeler la définition de la topologie de Zariski sur k^n.
2) Si V est un fermé de k^n, montrer que $Z(\mathcal{I}(V)) = V$.
3) Un espace topologique non vide E est dit *irréductible* lorsque $E = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés de E entraîne $E = F_1$ ou $E = F_2$.
   Soit V un fermé non vide de k^n muni de la topologie de Zariski induite. Montrer que :
   $$V \text{ est irréductible si et seulement si l'idéal } \mathcal{I}(V) \text{ est premier.}$$
4) En déduire une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et l'ensemble des fermés irréductibles (non vides) de k^n.