Corrigé de l'interrogation écrite n°2

Lundi 11 mai 2015

Exercice 1. 1) Un anneau (commutatif, unitaire) est dit noethérien si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(a) toute suite d'idéaux croissante pour l'inclusion est stationnaire ;

(b) toute famille non vide d'idéaux possède un élément maximal pour l'inclusion ;

(c) tout idéal est engendré par un nombre fini d'éléments.

2) La suite d'idéaux $(I_n)_{n\geq 1}$ de $K[X_1, X_2, \ldots]$ définie par $I_n = (X_1, \ldots, X_n)$ est clairement croissante. Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $I_n = I_{n+1}$. Alors X_{n+1} appartient à I_n et s'écrit

$$X_{n+1} = P_1(\underline{X})X_1 + \ldots + P_n(\underline{X})X_n$$

où les $P_i(\underline{X})$ sont des polynômes de $K[X_1, X_2, \ldots]$ (ils n'ont donc qu'un nombre fini d'indéterminées). En évaluant X_i en 0 pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ dans cette égalité, on obtient $X_{n+1} = 0$ dans $K[X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots]$. Comme X_{n+1} est une indéterminée, c'est impossible. Donc l'anneau $K[X_1, X_2, \ldots]$ n'est pas noethérien.

Exercice 2. Dans ce qui suit, A désigne un anneau et M un A-module.

1) Pour toute partie S de M, on pose $\mathrm{Ann}(S) = \{a \in A \mid \forall s \in S, as = 0\}$.

(a) Il est clair que $0 \in \mathrm{Ann}(S)$. Si a et b sont dans $\mathrm{Ann}(S)$ alors pour tout $s \in S$ on a $(a-b)s = as - bs = 0 - 0 = 0$, donc $a - b \in \mathrm{Ann}(S)$. Si $a \in \mathrm{Ann}(S)$ et $b \in A$ alors pour tout $s \in S$ on a $(ab)s = b(as) = b0 = 0$ donc $ab \in \mathrm{Ann}(S)$. Cela prouve que $\mathrm{Ann}(S)$ est un idéal de A.

(b) Supposons que le A-module M est noethérien. Soit $m \in M$. Le morphisme de A-modules $A \to M$ qui à a associe am a pour noyau $\mathrm{Ann}(m)$. Il identifie $A/\mathrm{Ann}(m)$ à Am, qui est un sous A-module de M. Comme M est noethérien, Am est noethérien. Donc $A/\mathrm{Ann}(m)$ est noethérien comme A-module.

2) Soient N_1 et N_2 des sous-modules de M. On suppose les A-modules M/N_1 et M/N_2 noethériens. Le morphisme canonique de A-modules $M \to M/N_1 \times M/N_2$ a pour noyau $N_1 \cap N_2$ (mais il n'a aucune raison d'être surjectif). Il identifie $M/(N_1 \cap N_2)$ à un sous-module de $M/N_1 \times M/N_2$. Or $M/N_1 \times M/N_2$ est noethérien comme produit de modules noethériens, et on sait qu'un sous-module d'un module noethérien est noethérien. Donc le A-module $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.

3) Comme M est noethérien, il est en particulier de type fini.

4) Notons $\{m_1, \ldots, m_s\}$ une famille génératrice de M. Il est clair à partir des définitions que $\mathrm{Ann}(M) \subset \mathrm{Ann}(m_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(m_s)$. Inversement soit $a \in \mathrm{Ann}(m_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(m_s)$. Alors on a $am_1 = 0, \ldots, am_s = 0$. Or tout élément $m \in M$ s'écrit $m = a_1m_1 + \ldots + a_sm_s$ avec $a_1, \ldots, a_s$ dans A, donc $am = a_1(am_1) + \ldots + a_s(am_s) = 0 + \ldots + 0 = 0$. Cela prouve que $a \in \mathrm{Ann}(M)$ et en fin de compte l'égalité $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ann}(m_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(m_s)$.

5) D'après la question 1b, tous les A-modules $A/\mathrm{Ann}(m_i)$ sont noethériens. Les questions 2 et 4 et une récurrence immédiate sur s entraînent que *le A-module* $A/\mathrm{Ann}(M)$ est noethérien. Il reste à voir pourquoi *l'anneau* $A/\mathrm{Ann}(M)$ est noethérien.

Un instant de réflexion permet de se convaincre que tout idéal I de $A/\mathrm{Ann}(M)$ est aussi un sous-A-module de $A/\mathrm{Ann}(M)$, la multiplication par les éléments de A étant donnée par $a * (b \bmod \mathrm{Ann}(M)) = (ab) \bmod \mathrm{Ann}(M)$. L'idéal I est donc engendré sur A par une famille finie. En particulier, la même famille engendre I comme module sur l'anneau $A/\mathrm{Ann}(M)$, c'est-à-dire comme idéal de $A/\mathrm{Ann}(M)$. Cela montre que l'anneau $A/\mathrm{Ann}(M)$ est noethérien.

Barème/15. Ex 1. 1) 3 pts 2) 2 pts Ex 2. 1a) 1 pt 1b) 2 pts 2) 2 pts 3) 1 pt 4) 2 pts 5) 2 pts.